BERKELEY
LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA

MATH/STAT
LIBRARY

MATH/STAT
LIBRARY

ÜBER DIE METHODE

DES

ARITHMETISCHEN MITTELS,

ERSTE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° IX.

MIT ELF HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

Cat. for Math-Stat. Lib.

Gift of C. A Noble

MATH-STAT.

Vom Verfasser übergeben den 22. Februar 1887.
Der Abdruck vollendet den 20. Mai 1887.

QA355
N4
MATH.-
STAT.
LIBRARY

ÜBER DIE METHODE

DES

ARITHMETISCHEN MITTELS,

ERSTE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KGL. SÄCHS. GESELLSCH. DER WISSENSCHAFTEN.

M779740

Die *Methode des arithmetischen Mittels* dürfte beachtenswerth sein für mancherlei physikalische Aufgaben. Insbesondere aber ist sie von Wichtigkeit für gewisse in der Functionentheorie auftretende und schwer zu absolvirende Existenzfragen, indem sie einen Ersatz gewährt für das so schöne und dereinst so viel benutzte, jetzt aber wohl für immer dahingesunkene *Dirichlet'sche Princip*.

In Folge dieser ihrer Wichtigkeit dürfte die Methode des arithmetischen Mittels seit der Zeit ihrer Publication vielfach studirt, durchforscht und zu erweitern gesucht sein, — ohne dass dabei indessen, abgesehen von einer Ausdehnung auf n Dimensionen*), nennenswerthe Resultate zu verzeichnen gewesen wären. Wenn man aber glauben wollte, dass die Methode ihren Höhepunkt, ihren höchsten Grad von Allgemeinheit bereits erreicht habe, nämlich glauben wollte, dass sie schlechtweg *nur* auf solche Curven und Flächen anwendbar sei, die *überall convex* sind; — so dürfte das doch wohl eine irrige Ansicht sein. Tauchen doch *über diese Grenze hinaus* mancherlei vereinzelte Fälle empor, in denen die Methode ihre Herrschaft behauptet. Ja noch mehr! Unter allen Fällen, die über diese Grenze hinaus bis jetzt untersucht worden sind, befindet sich (so weit mir bekannt) *kein einziger*, der *gegen* die Methode spräche.

So z. B. ist die Convergenz und Correctheit der Methode von mir constatirt worden für diejenige *convexconcave***) *Curve*, welche

*) *Riquier:* Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann pour la résolution de problèmes relatives aux fonctions de variables réelles qui vérifient l'équation différentielle $\Delta F = 0$. — 1886.

**) Es mag mir gestattet sein, eine geschlossene Curve, welche *theils convex*, *theils concav* ist, kurzweg als *convexconcav* zu bezeichnen.

aus der Ellipse durch die dem Gesetz der reciproken Radien entsprechende Transformation sich ergiebt. Desgleichen habe ich die Correctheit der Methode nachgewiesen für ein *System von zwei concentrischen Kreisen*, ebenso für das *System zweier confocaler Ellipsen*, und ebenso auch für ein *System zweier excentrischer Kreise*; — wobei allerdings einer gewissen Restriction zu gedenken ist.

Es liegt nämlich im unmittelbaren Charakter der Methode, dass sie auf ein *System* von Curven oder Flächen immer erst dann anwendbar sein kann, wenn die auf diesen Curven oder Flächen vorgeschriebenen Functionen zuvor vermehrt worden sind um gewisse *Constanten*. Sind, um näher hierauf einzugehen, im Ganzen $(n+1)$ geschlossene Curven oder Flächen σ, σ_1, σ_2, ... σ_n gegeben, und auf denselben resp. die Functionen f, f_1, f_2, ... f_n von Hause aus vorgeschrieben, so wird die Methode des arithmetischen Mittels (wie solches aus ihrer eigentlichen Natur von selber folgt) auf dieses Curven- oder Flächensystem immer erst dann anwendbar sein können, wenn die genannten Functionen zuvor ersetzt worden sind resp. durch f, $f_1 + k_1$, $f_2 + k_2$, ... $f_n + k_n$, wo k_1, k_2, ... k_n passend zu wählende *Constanten* vorstellen. Ohne auf die allgemeine Regel, nach welcher diese Constanten jedesmal zu bestimmen sind, hier näher einzugehen, will ich nur bemerken, dass jene Regel sich ausserordentlich einfach gestaltet für den *speciellen* Fall, dass die vorgeschriebenen Functionen f, f_1, f_2, ... f_n ebenfalls *Constanten* sind. Alsdann nämlich sind die Constanten k_1, k_2, ... k_n so zu wählen, dass $f = f_1 + k_1 = f_2 + k_2 = \ldots = f_n + k_n$ wird.

Ich beabsichtige, die Resultate meiner Untersuchungen allmählich zu publiciren. In der hier vorliegenden *ersten Abhandlung* werde ich die Methode des arithmetischen Mittels für eine *überall convexe* Curve oder Fläche darlegen. Dabei wird es namentlich meine Aufgabe sein, Dasjenige, was bereits früher — einigermassen verzettelt und vermischt mit allerhand physikalischen Betrachtungen — über diesen Gegenstand von mir publicirt worden ist, gegenwärtig in rein mathematischer Form, befreit von allen fremdartigen Beimischungen, *als ein übersichtliches und streng gegliedertes System* hinzustellen. Insbesondere wird dabei näher einzugehen sein auf die *Constante* λ, d. i. auf diejenige der gegebenen Curve oder Fläche eigenthümliche Constante, welche den eigentlichen *Angelpunkt* der Methode des arith-

metischen Mittels bildet, und welche von mir die *Configurationsconstante* dieser Curve oder Fläche genannt worden ist.

Das eigentliche Fundament der Methode des arithmetischen Mittels besteht nämlich darin, *dass diese (ihrer Natur nach positive) Configurationsconstante* λ *stets* < 1 *(nicht etwa* $\leqq 1$*) ist.*

In dieser Beziehung habe ich bereits früher*) dargelegt, dass für den *Kreis*

$$\lambda < \frac{3}{4},$$

und dass für die *Ellipse*

$$\lambda < 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^3$$

ist; dabei bezeichnen a und b die grosse und kleine Axe der Ellipse. Ferner habe ich damals dargethan, dass die Configurationsconstante λ einer *überall convexen und von geradlinigen Strecken freien geschlossenen Curve* der Formel entspricht:

$$\lambda < 1 - \frac{\Sigma}{4\pi\Delta};$$

dabei bezeichnet Σ den *Umfang* der Curve, und Δ den Durchmesser des *grössten* Kreises, welcher irgend drei (benachbarte oder nicht benachbarte) Punkte mit der Curve gemein hat. Desgleichen habe ich damals gezeigt, dass die Configurationsconstante λ einer *überall convexen und von ebenen Theilen freien geschlossenen Fläche* der Formel entspricht:

$$\lambda < 1 - \frac{\Sigma}{8\pi\Delta^2};$$

hier bezeichnet Σ das *Areal* (Complanationsresultat) der gegebenen Fläche, und Δ den Durchmesser der grössten Kugelfläche, welche mit der gegebenen Fläche irgend vier (benachbarte oder nicht benachbarte) Punkte gemein hat.

Diese Resultate meiner damaligen Untersuchung sind als *absolut strenge* zu bezeichnen. Und mit gleicher Strenge werde ich *gegenwärtig* (in § 6) nachweisen, dass jene Configurationsconstante λ um einen angebbaren Betrag kleiner als 1 ist für jede *beliebige* geschlossene Curve oder Fläche, falls nur dieselbe *überall convex* und *keine zwei-*

*) Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig, bei Teubner, 1877. — Daselbst auf Seite 173—179.

sternige ist. Allerdings ist solches auch schon damals von mir zu beweisen versucht worden. Genauer betrachtet, stützt sich aber mein damaliger Beweis auf das *Weierstrass'sche Theorem*, dass jedwede in einem gegebenen Spielraum stetige Function irgendwo in Erstreckung dieses Spielraums einen *Maximalwerth* besitzen muss; — und dabei erscheint es (dies ist der eigentliche Stein des Anstosses) einigermassen fraglich, ob jenes Weierstrass'sche Theorem auf die hier bei meiner Untersuchung vorliegenden sehr eigenthümlichen Verhältnisse *wirklich anwendbar* ist.

Es sei mir gestattet, hier noch auf einen andern Punkt meiner Untersuchungen aufmerksam zu machen. Man denke sich eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, und auf derselben irgend eine stetige Function f vorgeschrieben. Diese Function f mag in eine convergente Reihe entwickelt, und die Summe der p ersten Glieder dieser Reihe mit f^p bezeichnet sein. Ferner mögen Ψ und Ψ^p zwei über das *Innere* von σ ausgebreitete Functionen vorstellen. Und zwar sei Ψ diejenige Function, welche *auf* σ identisch mit f ist, und welche überdies *innerhalb* σ der Laplace'schen Gleichung $\Delta\Psi = 0$ und den bekannten Stetigkeitsanforderungen entspricht. Endlich sei Ψ^p diejenige Function, welche zu f^p in derselben Beziehung steht, wie Ψ zu f.

Denken wir uns nun die *Existenz* der Function Ψ^p, nicht etwa durch das Dirichlet'sche Princip, sondern auf einem *wirklich strengen* Wege erwiesen, so entsteht die Frage, ob aus dieser Existenz von Ψ^p unmittelbar auf die von Ψ geschlossen werden darf. Und insbesondere entsteht die Frage, ob, ebenso wie f^p, für $p = \infty$, gegen f convergirt, ebenso vielleicht auch Ψ^p gegen Ψ convergiren werde.

Diese Fragen, auf welche *Weierstrass* (vor ungefähr achtzehn Jahren, in einem Gespräch über die damals schon von mir gefundene Methode des arithmetischen Mittels) meine Aufmerksamkeit hinlenkte, sind *bejahend* zu beantworten, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass f^p auf σ überall *gleichmässig* gegen f convergirt; — wie ich solches in § 12 der gegenwärtigen Abhandlung zeigen werde.

Bevor ich die Abhandlung selber beginne, erlaube ich mir noch eine kurze Uebersicht über den Inhalt der einzelnen Paragraphen voranzuschicken.

§ 1 und § 2. — Es sei eine *geschlossene Curve* σ in der Ebene, oder eine *geschlossene Fläche* σ im Raume gegeben. Von den beiden Gebieten, in welche die Ebene resp. der Raum durch σ zerlegt wird, mag das *innere* mit $\mathfrak{I}$, das *äussere* mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet sein. Dabei soll die geschlossene Curve oder Fläche σ *ganz beliebig* gedacht werden, also z. B. mit *Ecken*, resp. mit *Ecken und Kanten* behaftet sein dürfen.

Solches vorangeschickt, sind zuvörderst (gewissermassen als die eigentlichen Bausteine meiner Untersuchung) die den Gebieten $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$ entsprechenden *Fundamentalfunctionen* einzuführen. Ich setze Folgendes fest:

Unter einer Fundamentalfunction des *inneren* Gebietes $\mathfrak{I}$ ist jede Function U zu verstehen, welche 1) *in Erstreckung von* $\mathfrak{I}$ (d. i. in $\mathfrak{I}$, inclusive σ) stetig ist, und welche 2) *innerhalb* $\mathfrak{I}$ (d. i. in $\mathfrak{I}$, exclusive σ) der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta U = 0$ und gewissen Stetigkeitsanforderungen entspricht. Diese Stetigkeitsanforderungen betreffen die ersten und zweiten Ableitungen von U nach den rechtwinkligen Coordinaten.

Andererseits soll unter einer Fundamentalfunction des *äusseren* Gebietes $\mathfrak{A}$ eine Function U verstanden werden, die im Ganzen *vier* Bedingungen Genüge leistet. Es soll nämlich 1) die Function U *in Erstreckung von* $\mathfrak{A}$ stetig sein. Sodann soll 2) die Function U *innerhalb* $\mathfrak{A}$ der Gleichung $\Delta U = 0$ und gewissen Stetigkeitsanforderungen entsprechen. Diese letzteren beziehen sich wieder auf die ersten und zweiten Ableitungen von U nach den rechtwinkligen Coordinaten. Die 3) Bedingung bezieht sich auf irgend eine die Curve oder Fläche σ umschliessende Kreislinie oder Kugelfläche s_0 vom Radius r_0, und besteht darin, dass das über alle Elemente ds_0 derselben ausgedehnte Integral

$$\int \frac{dU}{dr_0} ds_0$$

verschwinden soll. Endlich verlangt die 4) Bedingung, dass die Function U für alle unendlich fernen Punkte *ein und denselben* Werth, und zwar einen *bestimmten endlichen* Werth besitzt *).

*) Beispiele für solche Fundamentalfunctionen sind leicht angebbar. Denkt man sich nämlich auf der Curve oder Fläche σ eine Massenbelegung gegeben, deren Dichtigkeit auf σ *stetig* ist, und bezeichnet man das (Logarithmische resp. Newton'sche) Potential dieser Massenbelegung auf *innere* Punkte mit V_i, auf *äussere* Punkte mit V_a, so ist V_i eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{I}$. Hingegen wird V_a eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ nur dann sein, wenn die Gesammtmasse jener Belegung $= 0$ ist.

Ich betrachte nun zuvörderst die Fundamentalfunctionen des *inneren* Gebiets $\mathfrak{I}$. Für diese ergiebt sich der Satz, dass der *grösste* Werth, den eine solche Function in Erstreckung von $\mathfrak{I}$ besitzt, unter allen Umständen auf der *Grenze* von $\mathfrak{I}$, d. i. auf σ anzutreffen ist. Gleiches ergiebt sich für den *kleinsten* Werth. Hieraus ergiebt sich alsdann weiter, dass eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{I}$ vollständig bestimmt ist durch blosse Angabe ihrer auf der *Grenze* von $\mathfrak{I}$ (d. i. auf σ) vorhandenen Werthe.

Demgemäss entsteht die Aufgabe, eine Fundamentalfunction U des Gebietes $\mathfrak{I}$ *wirklich zu construiren*, falls ihre *Grenzwerthe* (d. i. ihre Werthe auf σ) *vorgeschrieben* sind. Ich werde diese Aufgabe das *innere Problem*, und die gesuchte Function U die jenen vorgeschriebenen Grenzwerthen *entsprechende* Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{I}$ nennen.

Dabei handelt es sich namentlich um die vorläufig noch *offen* bleibende Frage, ob dieses innere Problem stets eine Lösung besitzt, mit andern Worten um die Frage, ob eine solche den vorgeschriebenen Grenzwerthen entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{I}$ stets *existirt*, — also um diejenige Frage, welche man in früherer Zeit, auf Grund des *Dirichlet'schen Princips*, ohne Weiteres zu bejahen pflegte.

Es folgen nun analoge Betrachtungen über das *äussere* Gebiet $\mathfrak{A}$. Dieselben führen zu dem sogenannten *äusseren Problem*, welches darin besteht, die irgend welchen vorgeschriebenen Grenzwerthen *entsprechende* Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ zu construiren. Dabei ist zu beachten, dass das Gebiet $\mathfrak{A}$ nach Aussen ins Unendliche reicht, mithin nach Aussen *unbegrenzt* ist, dass also unter der *Grenze* von $\mathfrak{A}$ lediglich die Curve oder Fläche σ zu verstehen ist.

§ 3. — Man denke sich auf der geschlossenen Curve oder Fläche σ irgend eine daselbst *stetige* Function f vorgeschrieben, zerlege σ in unendlich kleine Elemente $d\sigma$, und markire überdies irgendwo in der Ebene resp. im Raume (einerlei, ob *ausserhalb* σ, *auf* σ, oder *innerhalb* σ) einen Punkt x. Sodann bezeichne man die *scheinbare Grösse* des Elementes $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter mit $\pm (d\sigma)_x$, und zwar mit $+ (d\sigma)_x$ oder $- (d\sigma)_x$, je nachdem jener in x befindliche Beobachter die *innere* oder *äussere* Seite des Elementes vor Augen hat. Das so definirte $(d\sigma)_x$ multiplicire man mit dem in $d\sigma$

vorhandenem Werthe f, und bilde das über die ganze Curve oder Fläche σ sich ausdehnende Integral:

$$(1.) \qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f_s (d\sigma)_x \ ,$$

so wie auch das (aus diesem für $f = 1$ sich ergebende) speciellere Integral:

$$(2.) \qquad w_x = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_x \ .$$

Dabei soll h eine Zahl sein, welche in der *Ebene* stets $= 1$, im *Raume* stets $= 2$ ist; so dass also z. B. $2h\pi$ den Umfang einer Kreislinie vom Radius Eins, resp. das Areal einer Kugelfläche vom Radius Eins vorstellt.

Der Werth des Integrals w_x ist sofort angebbar. Bezeichnet man nämlich den variablen Punkt x, je nachdem er *ausserhalb* σ, *auf* σ, oder *innerhalb* σ liegt, resp. mit a, s oder i, so ergeben sich die Formeln:

$$(3.) \qquad \begin{aligned} w_a &= 0 \ , \\ w_s &= \frac{\tau_s}{h\pi} = 1 - \vartheta_s \ , \\ w_i &= 2 \ , \end{aligned}$$

wo τ_s den Innenwinkel der Curve σ im Punkte s, resp. den *räumlichen* Innenwinkel der Fläche σ im Punkte s vorstellt. Dabei empfiehlt es sich (wie in der mittleren Formel schon angedeutet ist), an Stelle von τ_s eine etwas andere Grösse ϑ_s einzuführen mittelst der Substitution:

$$(3\,a.) \qquad \tau_s = h\pi(1 - \vartheta_s) \ .$$

Aus dieser Definition von ϑ_s folgt sofort, dass die Grösse ϑ_s für alle Punkte s der gegebenen Curve oder Fläche σ *Null* ist, mit alleiniger Ausnahme derjenigen Punkte, die in den *Ecken* der Curve σ, resp. in den *Ecken und Kanten* der Fläche σ liegen. Auch ergiebt sich, dass diese Grösse ϑ_s unter allen Umständen ein positiver oder negativer ächter Bruch ist, und dass sie insbesondere stets ein *positiver* ächter Bruch sein wird, sobald die gegebene Curve oder Fläche σ *überall convex* ist.

§ 4. — Nachdem soeben w_x untersucht ist, handelt es sich jetzt um die Untersuchung von W_x (1.). Man markire auf σ irgend einen Punkt s, und bezeichne den Werth der Function W_x in diesem Punkte s mit W_s. Alsdann wird dieses W_s wesentlich *verschieden* sein von den-

jenigen Werthen W_a und W_i, welche jene Function in den mit s benachbarten Punkten a und i besitzt. Um diese zwischen W_s und und den Nachbarwerthen W_a und W_i vorhandene *Discontinuität* näher angeben zu können, beschreibe man um den anfangs markirten *festen* Punkt s (als Centrum) eine kleine Kreislinie oder Kugelfläche o_s. Alsdann werden alle innerhalb o_s vorhandenen Werthe W_a, falls man o_s ins Unendliche verkleinert, gegen einen *bestimmten festen Werth* convergiren, der von W_s *verschieden* ist, und zur Unterscheidung mit W_{as} bezeichnet werden mag. Desgleichen werden bei jener Verkleinerung von o_s alle innerhalb o_s befindlichen Werthe W_i ebenfalls gegen einen *bestimmten festen*, von W_s *verschiedenen* Werth convergiren, der W_{is} heissen mag. Diese dem gegebenen Punkte s zugehörigen, aus den Gebieten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ herstammenden *Convergenzwerthe* W_{as} und W_{is} stehen zu dem *direct in s selber vorhandenem Werthe* W_s in folgenden Beziehungen:

$$W_{as} = W_s + \vartheta_s f_s - f_s \ ,$$
$$W_{is} = W_s + \vartheta_s f_s + f_s \ ,$$

wo ϑ_s die in (3a.) angegebene Bedeutung hat, und f_s den Werth der auf σ vorgeschriebenen Function f im Punkte s bezeichnet. Man kann diese Beziehungen einfacher so schreiben:

$$W_{as} = f_s' - f_s \ , \qquad (4.)$$
$$W_{is} = f_s' + f_s \ .$$

Hier hat alsdann f_s' die Bedeutung:

$$f_s' = \vartheta_s f_s + W_s \ ,$$

woraus mit Rücksicht auf (1.) sich ergiebt:

$$f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi} \int f(d\sigma)_s \ . \qquad (5.)$$

Denkt man sich nun die W_a für alle Punkte a (ausserhalb σ), und die W_{as} für alle Punkte s (auf σ) gebildet, so zeigt sich, dass all' diese Werthe W_a und W_{as} zusammengenommen eine *in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *stetige* Function repräsentiren. Desgleichen zeigt sich, dass alle W_i und W_{is} zusammengenommen eine *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{J}$ *stetige* Function ausmachen. Diese Resultate lassen sich noch weiter vervollständigen, und führen alsdann zu dem Satze, *dass die Gesammtheit der* W_a, W_{as} *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, *und dass ebenso die Gesammtheit*

der W_i, W_{is} eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{F}$ repräsentirt; — immer vorausgesetzt, dass die von Hause aus auf σ vorgeschriebenen Werthe f daselbst *stetig* sind.

§ 5. — Die Function f' ist, wie die Formel (5.) zeigt, unmittelbar ableitbar aus der vorgeschriebenen Function f. Denkt man sich nun unendlich viele Functionen

$$f,\ f',\ f'',\ f''',\ \dots\ f^{(n)},\ \dots\ , \tag{6.}$$

von denen jede aus der vorhergehenden in genau derselben Weise abgeleitet sein soll, wie f' aus f, so finden die Formeln statt:

$$\begin{aligned} f_s' &= \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_s\ , \\ f_s'' &= \vartheta_s f_s' + \frac{1}{h\pi}\int f'(d\sigma)_s\ , \\ f_s''' &= \vartheta_s f_s'' + \frac{1}{h\pi}\int f''(d\sigma)_s\ , \end{aligned} \tag{7.}$$

etc. etc. etc.

Auch ergiebt sich, dass f', f'', f''', ..., ebenso wie f selber, auf σ *stetig* sind. Die *grössten* und *kleinsten* Werthe, welche diese Functionen (6.) auf σ besitzen, mögen bezeichnet sein mit

$$\begin{aligned} &G,\ G',\ G'',\ G''',\ \dots\ G^{(n)},\ \dots\dots \\ &K,\ K',\ K'',\ K''',\ \dots\ K^{(n)},\ \dots\dots, \end{aligned}$$

so dass z. B. G und K den *grössten* und *kleinsten* Werth der Function f vorstellen.

Um auf diese Constanten G, G', ... und K, K', ... näher eingehen zu können, wollen wir jetzt voraussetzen, die Curve oder Fläche σ sei *überall convex* und *keine zweisternige*. Dabei verstehen wir unter einer zweisternigen *Curve* eine solche, die (wie z. B. die Peripherie eines Vierecks) aus *zwei Winkeln* zusammengesetzt ist, andererseits unter einer zweisternigen *Fläche* eine solche, die (wie z. B. die Oberfläche desjenigen Körpers, der durch Rotation eines Dreiecks um eine Seite entsteht) aus *zwei Kegelflächen* zusammengesetzt ist; indem wir dabei die Scheitelpunkte jener beiden Winkel resp. Kegelflächen als die *beiden Sterne* bezeichnen. Allgemeiner würde man sich so auszudrücken haben: Sind auf einer geschlossenen Curve σ zwei *feste* Punkte p und q angebbar von solcher Art, dass *jedwede* Tangente der Curve entweder durch p oder durch q geht, so soll die Curve *zweisternig* genannt werden; gleichzeitig sollen

alsdann p, q ihre beiden *Sterne* heissen. Und genau dasselbe ist in Bezug auf die zweisternigen *Flächen* zu sagen; nur mit dem Unterschiede, dass hier statt der Tangenten die Tangentialebenen in Betracht kommen.

Eine *zweisternige Curve* ist daher nicht nur das *Viereck*, sondern auch das *Dreieck*. Bei letzterem liegt der eine Stern in einer Ecke, der andere in einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seite. Andererseits wird zu den *zweisternigen Flächen* nicht nur das *Dihexaeder*, das *Rhomboeder*, das *Parallelepipedum*, sondern z. B. auch das *Tetraeder* gehören. Bei letzterem kann man den einen Stern in einer Ecke, den anderen in einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seitenfläche sich gelegen denken. Oder man kann auch den einen Stern in irgend einem Punkt der einen Kante, den andern in einen beliebigen Punkt der gegenüberliegenden Kante versetzen.

Setzt man nun voraus, dass die gegebene geschlossene Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige* ist, so ergeben sich für die Constanten G, G', ... und K, K', ... die Relationen:

$$(8.) \qquad \begin{aligned} G &\geqq G' \geqq G'' \geqq G''' \geqq \ldots\ldots \\ K &\leqq K' \leqq K'' \leqq K''' \leqq \ldots\ldots \end{aligned}$$

und überdies auch noch die Formel:

$$(9.) \qquad G^{(n)} - K^{(n)} \leqq (G - K)\,\lambda^n \ .$$

Hier bezeichnet λ die *Configurationsconstante* der gegebenen Curve oder Fläche σ, d. h. eine gewisse dieser Curve oder Fläche eigenthümliche *positive Constante*, von welcher sich nachweisen lässt, *dass sie stets* < 1 *ist:*

$$(9\,a.) \qquad \lambda < 1 \ .$$

Denkt man sich die Constanten G, G', ... und K, K', ... graphisch dargestellt als die Ordinaten zweier Curven, der Art, dass den Ordinaten G, K die Abscisse 0, den Ordinaten G', K' die Abscisse 1 u. s. w., allgemein den Ordinaten $G^{(n)}$, $K^{(n)}$ die Abscisse n angewiesen ist, so wird, nach (8.), die Curve $G\,G'\,G''\,\ldots$ *monoton sinken*, und die Curve $K\,K'\,K''\,\ldots$ *monoton steigen*. Ueberdies ist die Differenz der beiderlei Ordinaten:

$$G^{(n)} - K^{(n)}$$

durch Vergrösserung von n unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad

hinabdrückbar; wie solches aus (9.) sofort sich ergiebt, falls man nur beachtet, dass die Constante λ ein positiver *ächter Bruch* ist.

Demgemäss werden also jene beiden Curven $G\ G'\ G''\ \ldots$ und $K\ K'\ K''\ \ldots$ im Unendlichen *zusammenfliessen*, d. h. sie werden im Unendlichen *ein und dieselbe Ordinate* haben. Bezeichnet man diese letztere mit C, so hat man die Formeln:

$$\lim_{n=\infty} G^{(n)} = C\ ,$$
$$\lim_{n=\infty} K^{(n)} = C\ .$$

Da nun für $n = \infty$ die beiden *extremen* Werthe $G^{(n)}$, $K^{(n)}$ der Function $f^{(n)}$ unter einander identisch sind, beide $= C$, so gilt Gleiches auch für alle *übrigen* Werthe dieser Function. D. h. *die Function $f^{(n)}$ verwandelt sich für $n = \infty$ in eine Constante, und zwar in die Constante C*; was angedeutet werden kann durch die Formel:

$$\lim_{n=\infty} f^{(n)} = C\ . \qquad (10.)$$

Beiläufig ergiebt sich aus der hier angestellten Betrachtung, dass die Constante C zwischen G und K liegt, ebenso zwischen G' und K', u. s. w.

§ 6. — Die *cardinale Eigenschaft* der *Configurationsconstanten* λ besteht in der Formel (9a.):

$$\lambda < 1\ .$$

Diese Eigenschaft suche ich hier in § 6 von Neuem in wirklich strenger und zugleich möglichst allgemeiner Weise zu demonstriren, indem ich dabei als Ausgangspunkt für die Betrachtungen in der Ebene ein *geradliniges Fünfeck*, andererseits als Ausgangspunkt der räumlichen Betrachtungen ein *von sieben ebenen Flächen begrenztes Polyeder* nehme, und indem ich dabei einen Weg einschlage, der von dem vorhin (pag. 6) erwähnten Weierstrass'schen Theorem völlig *unabhängig* ist.

§ 6*a*. — In Betreff dieses nur wenige Seiten einnehmenden Paragraphs sei bemerkt, dass derselbe zu keinem nennenswerthen Resultat führt, sondern nur Betrachtungen enthält, die ich für späteren Gebrauch mir aufbewahren wollte.

§ 7 und § 8. — Hält man fest an der Voraussetzung, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige* sein soll, so sind jetzt, auf Grund der in (6.), (7.) construirten Functionen f', f'', f''' ..., die Lösungen des äusseren und inneren Problemes sofort angebbar. Bildet man nämlich, von den Functionen f, f', f'', f''', ... ausgehend, die Integrale:

$$(11.)\qquad \begin{aligned} W_x &= \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \ , \\ W_x' &= \frac{1}{h\pi}\int f'(d\sigma)_x \ , \\ W_x'' &= \frac{1}{h\pi}\int f''(d\sigma)_x \ , \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

und setzt man überdies:

$$(12.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - W_a - W_a' - W_a'' - \dots \ , \\ \Psi_i &= C + (W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \dots \ , \end{aligned}$$

wo C dieselbe Constante sein soll, wie in (10.), so sind diese beiden Reihen stets *convergent*. Und gleichzeitig werden alsdann die *Lösungen des äusseren und inneren Problemes* dargestellt sein durch die Functionen Φ_a und Ψ_i. Oder genauer ausgedrückt: *Die den auf σ vorgeschriebenen Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ werden alsdann dargestellt sein respective durch die Gesammtheit der Φ_a, Φ_{as} und durch die Gesammtheit der Ψ_i, Ψ_{is}.*

Hiermit aber ist alsdann die in § 1 und § 2 noch *offen* gebliebene Frage, wenigstens für eine *gewisse Classe* von Curven und Flächen, beantwortet, nämlich folgendes Theorem bewiesen:

Denkt man sich eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, welche überall convex und keine zweisternige ist, übrigens aber mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf, und denkt man sich auf dieser Curve oder Fläche σ irgend welche daselbst stetigen Werthe vorgeschrieben, so wird jederzeit eine, und immer nur eine diesen Werthen f entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ existiren. Und ebenso wird alsdann jederzeit eine, und immer nur eine den Werthen f entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren.

§ 9. — Man denke sich die auf σ vorgeschriebene Function f in eine auf σ *gleichmässig* convergente Reihe entwickelt, und bezeichne die Summe der p ersten Glieder dieser Reihe mit f^p. Oder allgemeiner: Man verstehe unter f^p eine mit einem variablen Parameter p behaftete Function, welche für jedwedes p auf σ *stetig* ist, und welche überdies, für $p = \infty$, auf σ *gleichmässig* gegen f convergirt. Ferner mögen Φ und Ψ die den Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{I}$ sein; und analoge Bedeutungen mögen Φ^p und Ψ^p haben mit Bezug auf die Werthe f^p. Alsdann gelangt man, wie ich zeigen werde, zu dem *Theorem*, dass, für $p = \infty$, Φ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *gleichmässig* gegen Φ, und ebenso Ψ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{I}$ *gleichmässig* gegen Ψ convergirt; — immer vorausgesetzt, dass die Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige* ist.

§ 10 und § 11. — Um das Theorem von dieser Restriction zu befreien, werden in § 10 und § 11 zunächst zwei ganz specielle die *Kreislinie* und die *Kugelfläche* betreffende Untersuchungen angestellt.

§ 12. — Solches absolvirt, ergiebt sich alsdann folgende Verallgemeinerung des in Rede stehenden Theorems:

Ist die geschlossene Curve oder Fläche σ eine ganz *beliebige*, haben ferner f und f^p die schon genannten Bedeutungen, und gelingt es (durch irgend welche Methode oder vielleicht auch durch Zufall) die der Function f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ^p und Ψ^p der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{I}$ wirklich zu construiren, so wird hierdurch die *Existenz* derjenigen Fundamentalfunctionen Φ und Ψ, welche der eigentlich vorgeschriebenen Function f entsprechen, bereits *bewiesen* sein.

Und zwar wird alsdann, für $p = \infty$, die Function Φ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *gleichmässig* gegen Φ, und die Function Ψ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{I}$ *gleichmässig* gegen Ψ convergiren.

Durch dieses Theorem finden die schon früher (pag. 6) erwähnten *Weierstrass'schen Fragen* ihre Beantwortung.

§ 1.

Die Fundamentalfunctionen des von einer geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzten inneren Gebietes $\mathfrak{I}$.

Die nachfolgenden Untersuchungen betreffen ziemlich gleichmässig *die Ebene* und *den Raum*. Dabei soll unter σ, sobald von der Ebene die Rede ist, eine gegebene *geschlossene Curve*, und sobald vom Raume die Rede ist, eine gegebene *geschlossene Fläche* verstanden werden. Von den beiden Theilen, in welche die unendliche Ebene durch die Curve σ, oder der unendliche Raum durch die Fläche σ zerfällt, mag der *innere* Theil mit $\mathfrak{I}$, der *äussere* mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet sein.

Definition. — *Wir wollen unter einer Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{I}$ jedwede Function $U = U(x, y)$, resp. $U = U(x, y, z)$ verstehen, die folgenden Bedingungen entspricht:*

(1.) .... *In Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{I}$ soll U eindeutig und stetig sein.*

(2.) .... *Innerhalb $\mathfrak{I}$ sollen die ersten und zweiten Ableitungen von U nach x, y, resp. x, y, z stetig sein, und überdies soll innerhalb $\mathfrak{I}$ die Gleichung erfüllt sein:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \,, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \,.$$

Dabei ist der Unterschied zwischen »in Erstreckung von $\mathfrak{I}$« und »innerhalb $\mathfrak{I}$« wohl zu beachten. Während nämlich die erste Ausdrucksweise das ganze Gebiet $\mathfrak{I}$ inclusive seiner Grenze, d. i. inclusive σ, betrifft, ist bei der zweiten Ausdrucksweise das Gebiet $\mathfrak{I}$ exclusive σ zu verstehen.

Auf eine Fundamentalfunction U sind, der soeben gegebenen Definition zufolge, die *Green'schen Sätze* anwendbar, allerdings nicht mit Bezug auf $\mathfrak{I}$ selber, wohl aber mit Bezug auf jedes *kleinere* Gebiet, das mit all' seinen Punkten *innerhalb* $\mathfrak{I}$ liegt. Markirt man z. B. *innerhalb* $\mathfrak{I}$ irgend einen Punkt p, und beschreibt man um p (als Centrum) mit dem Radius r eine *Kreislinie* resp. *Kugelfläche* s, und zwar der Art, dass s vollständig *innerhalb* $\mathfrak{I}$ liegt, so werden jene

Green'schen Sätze anwendbar sein auf das von s umgrenzte Gebiet (d. i. auf die von s begrenzte *Kreisfläche* resp. auf den von s begrenzten *Kugelraum*). Man erhält in solcher Weise z. B. die Formeln:

$$\int \frac{dU}{dr}\, ds = 0 \,, \tag{3.}$$

$$U_p = \frac{1}{2h\pi} \int \left(T \frac{dU}{dr} - U \frac{dT}{dr} \right) ds \,, \tag{4.}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente ds der Kreislinie oder Kugelfläche s. Dabei bezeichnet U_p den Werth von U im Centrum p, ferner r den *Radius* von s. Ueberdies ist*) $h = 1$, resp. $= 2$, und $T = \log \frac{1}{r}$, resp. $= \frac{1}{r}$. Aus dieser Bedeutung von T ergiebt sich sofort, dass T und $\frac{dT}{dr}$ auf der Kreislinie oder Kugelfläche s *constant* sind; so dass man also die Formel (4.) auch so schreiben kann:

$$U_p = \frac{T}{2h\pi} \int \frac{dU}{dr}\, ds - \frac{1}{2h\pi} \frac{dT}{dr} \int U ds \,.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (3.):

$$U_p = -\frac{1}{2h\pi} \frac{dT}{dr} \int U ds \,,$$

also, weil $h = 1$, resp. $= 2$, und $\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{r}$, resp. $= -\frac{1}{r^2}$ ist:

$$U_p = \frac{\int U ds}{2\pi r} \,, \quad \text{resp. } U_p = \frac{\int U ds}{4\pi r^2} \,. \tag{5.}$$

Diese beiden Formeln (5.) sagen aus, dass der Werth von U im Punkte p gleich gross ist mit dem *arithmetischen Mittel* aller auf s vorhandenen Werthe von U, und führen also, falls man dieses arithmetische Mittel durch die Charakteristik $\mathfrak{M}$ andeutet, zu folgendem Resultate:

---

*) Auch in Zukunft soll das h in der *Ebene* stets $= 1$, im *Raume* stets $= 2$ sein. Und ebenso soll das T in der *Ebene* stets $= \log \frac{1}{r}$, im *Raume* stets $= \frac{1}{r}$ sein.

Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{F}$, und construirt man eine völlig innerhalb $\mathfrak{F}$ liegende Kreislinie oder Kugelfläche s, mit dem Centrum p, so wird

$$U_p = \mathfrak{M}(U_s) \tag{6.}$$

sein. D. h. es wird der in p vorhandene Werth U gleichgross sein mit dem arithmetischen Mittel aller auf s vorhandenen Werthe U.

Schon früher (im 3. Bd. der Math. Annal., pag. 341 u. 431), und ebenso in meinen Vorlesungen über die Abel'schen Integrale*), habe ich gezeigt, dass eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{F}$ ihren *grössten* und *kleinsten* Werth stets *an der Grenze* von $\mathfrak{F}$, d. i. auf σ hat. Da aber dieser Satz an ersterer Stelle nicht mit der wünschenswerthen Uebersichtlichkeit, und an letzterer Stelle nicht mit der erforderlichen Strenge geführt worden ist, so erlaube ich mir, auf den Beweis des Satzes hier von Neuem einzugehen.

Versteht man unter U irgend eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{F}$, so sind offenbar nur zwei Fälle möglich:

I. Fall: U ist in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{F}$ *constant.* Dieser Fall bedarf keiner weiteren Untersuchung. Höchstens wird man bemerken können, dass in diesem Falle jener in Erstreckung von $\mathfrak{F}$ vorhandene constante Werth zugleich auch der *grösste* sei, der in Erstreckung von $\mathfrak{F}$ sich vorfindet, und ebenso auch der *kleinste.*

II. Fall: U ist in Erstreckung von $\mathfrak{F}$ *inconstant.* In diesem Falle markire man irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{F}$ einen Punkt p, und beschreibe um p (als Centrum) eine Kreislinie oder Kugelfläche s_1, der Art, dass s_1 völlig *innerhalb* $\mathfrak{F}$ liegt. Alsdann muss U *innerhalb* s_1 *inconstant* sein. [Denn wäre es innerhalb s_1 constant, so würde diese Constanz, nach bekanntem Satze**), auf *sämmtliche* Punkte des Gebietes $\mathfrak{F}$ sich ausdehnen; was dem Charakter des hier betrachteten II. Falles widerspricht]. Da nun also die Function U *innerhalb* s_1 *inconstant* ist, so wird sie daselbst z. B. nicht überall $= U_p$ sein können. Dem-

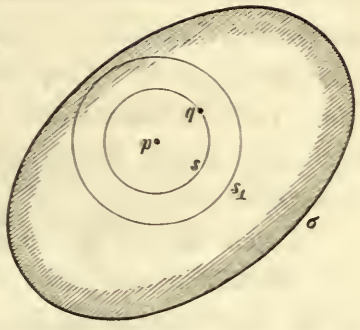
*) Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Integrale. II. Aufl. 1884, pag 395.

**) Nämlich nach einem schon von *Gauss* aufgestellten Satze. Der von Gauss selber für diesen Satz gegebene wenig zuverlässige Beweis [Gauss' Werke, Bd. 5, Seite 223] kann leicht durch einen *absolut strengen* Beweis ersetzt werden; wie solches von mir angedeutet worden ist in den Math. Annalen, Bd. 3, Seite 339 und 430.

gemäss muss innerhalb s_1 irgend ein Punkt q angebbar sein, in welchem die Function U von U_p *verschieden* ist:

$$(\alpha.) \qquad U_q \neq U_p \ .$$

Legt man nun*) durch diesen Punkt q eine neue Kreislinie oder Kugelfläche s, concentrisch zu s_1, so muss [nach Satz (6.)] der im Centrum von s vorhandene Werth U_p das arithmetische Mittel all' derjenigen Werthe sein, welche U auf s besitzt:



$$(\beta.) \qquad U_p = \mathfrak{M}(U_s) \ .$$

Hieraus folgt, dass *entweder* die auf s vorhandenen U's *sämmtlich* $= U_p$ sind, *oder aber*, dass unter jenen auf s vorhandenen U's solche sich vorfinden, die $< U_p$, und gleichzeitig auch solche, die $> U_p$ sind. Die *erste* Möglichkeit ist abgeschnitten durch die Formel $(\alpha.)$ [derzufolge der auf s liegende Punkt q mit einem Werthe U_q behaftet ist, der *nicht* $= U_p$ ist]. Es bleibt also nur die *zweite* Möglichkeit übrig; und wir gelangen daher zu der Gewissheit, dass unter den auf s vorhandenen U's solche vorhanden sind, die $< U_p$, und gleichzeitig auch solche, die $> U_p$ sind. Jener im Punkte p vorhandene Werth U_p kann also nicht der *grösste* von all' denjenigen Werthen sein, die U in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ besitzt. Dieser Satz aber kann, weil der Punkt p innerhalb $\mathfrak{J}$ *beliebig* gewählt war, von Neuem wiederholt werden für jedweden *anderen* Punkt p, falls nur derselbe wiederum *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt; sodass man also sagen kann:

$(\gamma.)$ Der *grösste* Werth, den U in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ besitzt, ist in einem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{J}$ niemals anzutreffen.

Folglich wird derselbe nur *an der Grenze* von $\mathfrak{J}$, d. i. nur auf σ anzutreffen sein. Analoges ergiebt sich offenbar für den *kleinsten* Werth. *Hiermit ist die Discussion des II. Falles beendet.*

---

*) In der vorstehenden Figur ist die *Grenze des betrachteten Gebietes* $\mathfrak{J}$, d. i. die Curve oder Fläche σ, *schraffirt*.

Wir können schliesslich die Resultate bei Betrachtung des I. und II. Falles *zusammenfassen*, indem wir uns folgendermassen ausdrücken:

Erster Satz. — *Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$, so wird der grösste Werth, den U in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ besitzt, unter allen Umständen — einerlei ob U in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ constant oder inconstant ist — auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) anzutreffen sein. Und ist insbesondere U in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ inconstant, so wird jener grösste Werth nur auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. nur auf σ) anzutreffen sein.*

Genau dasselbe gilt vom kleinsten Werthe.

Betrachtet man also die Werthe, welche eine solche Function U auf der Grenze von $\mathfrak{J}$, d. i. auf σ besitzt, und bezeichnet man den kleinsten und grössten dieser auf σ vorhandenen Werthe resp. mit K und G, so werden die Werthe, welche U *innerhalb* $\mathfrak{J}$ besitzt, ebenfalls sämmtlich zwischen K und G liegen, also z. B. *constant* sein, falls $K = G$ ist. Somit ergiebt sich folgender

Zweiter Satz. — *Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$, und setzt man voraus, dass U auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) constant ist, so wird U in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ allenthalben constant sein.*

Hieraus folgt sofort, dass eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ durch blosse Angabe ihrer auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) vorhandenen Werthe vollständig bestimmt ist. Denn existirten zwei solche Functionen U und U', beide mit denselben Werthen auf σ, so würde offenbar die Differenz $U - U'$ eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein, die auf σ überall $= 0$ ist. Zufolge des vorhergehenden Satzes würde daher diese Differenz $U - U'$ den Werth 0 haben *in ganzer Erstreckung* von $\mathfrak{J}$. — *Q. e. d.*

Es ergiebt sich somit folgender

Dritter Satz. — *Eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ ist vollständig bestimmt durch blosse Angabe ihrer auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) vorhandenen Werthe.*

Nach Constatirung dieses Satzes entsteht von selber die Aufgabe, eine Fundamentalfunction U des Gebietes $\mathfrak{J}$ wirklich zu construiren, falls ihre Werthe *an der Grenze* von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) in *beliebiger* jedoch *stetiger* Weise vorgeschrieben sind. Ich werde diese Aufgabe das *innere Problem* nennen, und jene gesuchte Function U

kurzweg als *die den vorgeschriebenen Grenzwerthen entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{F}$ bezeichnen. — Dabei handelt es sich namentlich um die Frage, ob eine derartige Function stets *existirt*, — eine Frage, die man früher, auf Grund des *Dirichlet'schen Princips*, ohne Weiteres zu bejahen gewöhnt war.

§ 2.

Die Fundamentalfunctionen des von einer geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzten äusseren Gebietes $\mathfrak{A}$.

Das in der Ebene oder im Raume gegebene Gebiet $\mathfrak{A}$ [vgl. den Anfang des vorhergehenden §.] ist innerlich von der geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzt, und erstreckt sich nach Aussen ringsum ins Unendliche. Dieses Gebiet $\mathfrak{A}$ ist also nach Aussen *unbegrenzt*, und besitzt mithin überhaupt nur *eine* Grenze, welche dargestellt ist durch jene Curve oder Fläche σ.

Definition. — *Wir wollen unter einer Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *jede Function* $U = U(x, y)$ *resp.* $U = U(x, y, z)$ *verstehen, welche folgenden vier Bedingungen entspricht.*

(1.) .... *In Erstreckung von* $\mathfrak{A}$ *soll* U *eindeutig und stetig sein.*

(2.) .... *Innerhalb* $\mathfrak{A}$ *sollen die ersten und zweiten Ableitungen von* U *nach* x, y, *resp. nach* x, y, z *stetig sein, und überdies soll innerhalb* $\mathfrak{A}$ *die Gleichung erfüllt sein:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \ , \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \ .$$

(3.) .... *Es ist gegeben irgend eine Kreislinie oder Kugelfläche* s_0, *welche die Curve oder Fläche* σ *umschliesst, und vollständig innerhalb* $\mathfrak{A}$ *liegt. Und es wird verlangt, die Function* U *solle von solcher Beschaffenheit sein, dass das über alle Elemente* ds_0 *dieser Kreislinie oder Kugelfläche* s_0 *ausgedehnte Integral*

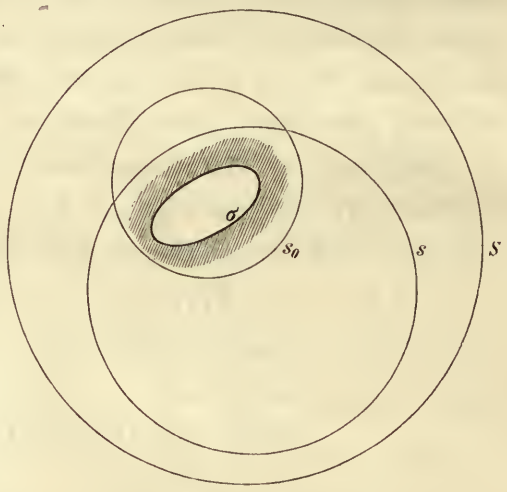
$$\int \frac{dU}{dr_0}\, ds_0$$

$= 0$ *sei. Dabei bezeichnet* r_0 *den Radius von* s_0, *mithin* $\frac{dU}{dr_0}$ *den Differentialquotienten nach der Richtung des Radius.*

(4.) .... *Die Function U soll in allen unendlich fernen Punkten ein und denselben Werth, und zwar einen bestimmten endlichen Werth haben.*

Oder genauer ausgedrückt: Denkt man sich um einen festen Punkt mit sehr grossem Radius R eine Kreislinie oder Kugelfläche S beschrieben, so sollen die Differenzen sämmtlicher Werthe, welche U ausserhalb S besitzt, durch Vergrösserung von R unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein.

Auf eine so definirte Fundamentalfunction U des Gebietes $\mathfrak{A}$ sind die *Green'schen Sätze* [wie aus (1.), (2.) folgt] anwendbar; allerdings nicht mit Bezug auf $\mathfrak{A}$ selber, wohl aber mit Bezug auf jedes *endliche* Gebiet, welches mit all' seinen Punkten *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt. Denkt man sich z. B. irgend eine Kreislinie oder Kugelfläche s construirt, welche [ebenso wie s_0; vgl. (3.)] die Curve oder Fläche σ *umschliesst*, und vollständig *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, und denkt man sich überdies eine Kreislinie oder Kugelfläche S construirt, welche sowohl s wie auch s_0 umschliesst*), so werden zufolge jener Green'schen Sätze die Formeln stattfinden:



$$(5.) \qquad \int \frac{dU}{dr_0}\, ds_0 = \int \frac{dU}{dR}\, dS \,,$$

$$(6.) \qquad \int \frac{dU}{dr}\, ds = \int \frac{dU}{dR}\, dS \,,$$

wo r_0, r, R die Radien von s_0, s, S vorstellen. Nach (3.) ist aber die *linke* Seite von (5.) $= 0$, folglich auch die *rechte*. Hieraus

*) In der beistehenden Figur ist die *Grenze* σ des nach Aussen sich ringsum ins Unendliche erstreckenden Gebietes $\mathfrak{A}$ *schraffirt* angegeben.

folgt weiter, dass die *linke* Seite von (6.) ebenfalls $= 0$ ist. Also der Satz:

Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und versteht man unter s irgend eine die Curve oder Fläche σ umschliessende, und völlig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegende Kreislinie oder Kugelfläche, so wird das über s ausgedehnte Integral

$$\int \frac{dU}{dr}\, ds \tag{7.}$$

*stets $= 0$ sein. Hier bezeichnet r den Radius von s**).

Construirt man jetzt eine zu s *concentrische* [in der Figur *nicht* gezeichnete] Kreislinie oder Kugelfläche s_1, welche, ebenso wie s, die Curve oder Fläche σ *umschliesst*, und vollständig *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, so ergiebt sich, auf Grund der Green'schen Sätze, die Formel:

$$\int \left(T\frac{dU}{dr} - U\frac{dT}{dr}\right) ds = \int \left(T_1 \frac{dU}{dr_1} - U\frac{dT_1}{dr_1}\right) ds_1 \,, \tag{8.}$$

wo r und r_1 die Radien von s und s_1 vorstellen, während $T = \log \frac{1}{r}$, resp. $= \frac{1}{r}$, und $T_1 = \log \frac{1}{r_1}$, resp. $= \frac{1}{r_1}$ sein soll. Demgemäss sind T und $\frac{dT}{dr}$ auf s *constant*, ebenso T_1 und $\frac{dT_1}{dr_1}$ auf s_1. Die Formel (8.) kann daher auch so geschrieben werden:

$$T\int \frac{dU}{dr}\, ds - \frac{dT}{dr}\int U ds = T_1 \int \frac{dU}{dr_1}\, ds_1 - \frac{dT_1}{dr_1}\int U ds_1 \,,$$

oder, weil die hier in T und T_1 multiplicirten Integrale [zufolge des Satzes (7.)] $= 0$ sind, auch so:

$$\frac{dT}{dr}\int U ds = \frac{dT_1}{dr_1}\int U ds_1 \,;$$

und diese Formel endlich kann, weil $T = \log \frac{1}{r}$, resp. $= \frac{1}{r}$, mithin $\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{r}$, resp. $= -\frac{1}{r^2}$ ist, und Analoges von $\frac{dT_1}{dr_1}$ gilt, auch so geschrieben werden:

$$\frac{\int U ds}{2\pi r} = \frac{\int U ds_1}{2\pi r_1}, \text{ resp. } \frac{\int U ds}{4\pi r^2} = \frac{\int U ds_1}{4\pi r_1^2} \,. \tag{9.}$$

---

*) Man übersieht sofort, dass dieser Satz auch dann noch gelten wird, wenn man unter s eine *ganz beliebige* geschlossene Curve oder Fläche versteht, falls nur dieselbe die Curve oder Fläche σ umschliesst und völlig *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt. Statt $\frac{dU}{dr}$ ist alsdann $\frac{dU}{dn}$ zu substituiren, wo n die *Normale* von s vorstellt. — Eine solche Ausdehnung des Satzes ist aber einstweilen für unsere Zwecke nicht erforderlich.

Demgemäss gelangt man, unter Anwendung des schon vorhin eingeführten Zeichens $\mathfrak{M}$, zu folgendem Satze:

Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und sind ferner s und s_1 irgend zwei concentrische Kreislinien oder Kreisflächen, welche die Curve oder Fläche σ umschliessen, und vollständig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegen, so wird stets

$$\mathfrak{M}(U_s) = \mathfrak{M}(U_{s_1}) \tag{10.}$$

sein. D. h. es wird alsdann das arithmetische Mittel der auf s vorhandenen Werthe U stets eben so gross sein, wie das arithmetische Mittel der auf s_1 liegenden Werthe U.

Nach (4.) hat U für alle unendlich fernen Punkte *ein und denselben* Werth. Bezeichnet man denselben mit Γ, und lässt man jetzt in der Formel (10.) den Radius der Kreislinie oder Kugelfläche s_1 ins *Unendliche* wachsen, so nimmt jene Formel die Gestalt an: $\mathfrak{M}(U_s) = \Gamma$. Also der Satz:

Bezeichnet U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, ferner Γ ihren Werth im Unendlichen [vgl. (4.)], *und denkt man sich irgend eine Kreislinie oder Kugelfläche s construirt, welche die Curve oder Fläche σ umschliesst, und vollständig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt, so wird*

$$\mathfrak{M}(U_s) = \Gamma \tag{11.}$$

sein. D. h. das arithmetische Mittel der auf s befindlichen Werthe U wird stets $= \Gamma$ sein.

Es sei nun U irgend eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Function näher zu untersuchen, und namentlich diejenigen Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$ zu entdecken, in denen sie am *Grössten* und *Kleinsten* ist. Offenbar sind nur zwei Fälle möglich:

I. Fall: U ist in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *constant*. Alsdann wird der *grösste* Werth, den U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ besitzt, in jedwedem Punkte dieses Gebietes anzutreffen sein; ebenso der *kleinste*.

II. Fall: U ist in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *inconstant*. In diesem Falle kann man, was den *grössten* Werth von U in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ betrifft, genau ebenso verfahren, wie im vorhergehenden § [bei der Discussion des *damaligen* II. Falles; pag. 18], und gelangt auf diese Weise zu dem Resultat, dass jener grösste Werth in keinem

Punkte *innerhalb* $\mathfrak{A}$ anzutreffen ist, oder, genauer ausgedrückt, zu dem Resultat,

(α.) dass jener *grösste Werth* in keinem *endlichen* Punkte *innerhalb* $\mathfrak{A}$ anzutreffen ist.

Denn es könnte vielleicht der in einem innern Punkte p vorhandene Werth U_p gegen jenen *grössten Werth* convergiren, sobald man den Punkt p auf irgend welchem Wege *ins Unendliche* gehen lässt. — Um auf diese Frage näher einzugehen, construire man eine sehr grosse Kreislinie oder Kugelfläche s_1, der Art, dass sie die gegebene Curve oder Fläche σ *umschliesst*, und vollständig *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt. Alsdann muss U *ausserhalb* s_1 *inconstant* sein. [Denn wäre es ausserhalb s_1 constant, so würde diese Constanz, nach einem bekannten Satze*), sich ausdehnen über *sämmtliche* Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$; was dem Charakter des hier betrachten II. Falles widerspricht]. Da nun also die Function U *ausserhalb* s_1 *inconstant* ist, so wird sie daselbst z. B. nicht überall $= \Gamma$ sein können, wo Γ den Werth der Function U im Unendlichen vorstellen soll [vgl. (4.)]. Demgemäss muss *ausserhalb* s_1 irgend ein Punkt q angebbar sein, in welchem die Function U von Γ *verschieden* ist:

(β.) $\quad U_q \neq \Gamma$.

Legt man nun durch diesen Punkt q eine neue Kreislinie oder Kugelfläche s, concentrisch zu s_1, so muss [nach Satz (11.)] das arithmetische Mittel der auf s vorhandenen Werthe von U identisch mit Γ sein:

(γ.) $$\Gamma = \mathfrak{M}(U_s) .$$

Hieraus folgt, dass *entweder* die auf s vorhandenen U's *sämmtlich* $= \Gamma$ sind, *oder aber*, dass unter jenen auf s vorhandenen U's solche sich vorfinden, die $< \Gamma$, und gleichzeitig auch solche, die $> \Gamma$ sind. Die *erste* Möglichkeit ist aber abgeschnitten durch die Formel (β.), [derzufolge der auf s liegende Punkt q mit einem Werthe U_q be-

*) Es ist hier wieder der schon auf pag. 18 benutzte *Gauss*'sche Satz gemeint.

haftet ist, der *nicht* $= \Gamma$ ist]. Es bleibt also nur die *zweite* Möglichkeit übrig; und wir gelangen somit zu der Gewissheit, dass unter den auf s vorhandenen U's solche vorhanden sind, die $< \Gamma$, und gleichzeitig auch solche, die $> \Gamma$ sind. Jener im Unendlichen vorhandene Werth Γ kann also nicht der *grösste* von all' denjenigen Werthen sein, die U in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ besitzt. Hierdurch aber gewinnt der in (α.) ausgesprochene Satz folgende Fassung:

(δ.) Der *grösste* Werth, den U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ besitzt, ist in einem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{A}$, mag nun derselbe im Endlichen oder im Unendlichen gedacht werden, niemals anzutreffen.

Folglich wird jener *grösste* Werth nur *an der Grenze* von $\mathfrak{A}$, also nur auf σ anzutreffen sein. Analoges ergiebt sich offenbar für den *kleinsten* Werth. *Hiermit ist die Discussion des* II. *Falles beendet.*

Schliesslich können wir die Resultate bei Betrachtung des I. und II. Falles [das Resultat des II. Falles ist in (δ.) ausgesprochen], zusammenfassen, und gelangen so zu folgendem Satz:

Erster Satz. — *Ist U irgend eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, so wird der grösste Werth, den U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ besitzt, unter allen Umständen — einerlei ob U im Gebiete $\mathfrak{A}$ constant oder inconstant ist — an der Grenze von $\mathfrak{A}$ (d. i. auf σ) anzutreffen sein. Und ist insbesondere U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ inconstant, so wird jener grösste Werth nur auf der genannten Grenze (d. i. nur auf σ) anzutreffen sein.*

Genau dasselbe gilt vom kleinsten Werthe.

Auf Grund dieses Satzes ergeben sich nun [genau ebenso wie früher beim Gebiete $\mathfrak{F}$; vergl. pag. 20] zwei weitere Sätze. Dieselben lauten:

Zweiter Satz. — *Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und setzt man voraus, dass U auf der Grenze von $\mathfrak{A}$ (d. i. auf σ) constant ist, so wird U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ allenthalben constant sein.*

Dritter Satz. — *Eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ ist vollständig bestimmt durch blosse Angabe ihrer auf der Grenze von $\mathfrak{A}$ (d. i. auf σ) vorhandenen Werthe.*

Es entsteht dabei die Aufgabe, eine Fundamentalfunction U des Gebietes $\mathfrak{A}$ wirklich zu construiren, falls ihre Werthe *an der Grenze*

von $\mathfrak{A}$ (d. i. auf σ) in *beliebiger*, jedoch *stetiger* Weise vorgeschrieben sind. Ich werde diese Aufgabe das *äussere Problem* nennen, und jene gesuchte Function kurzweg als *die den vorgeschriebenen Grenzwerthen entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ bezeichnen. — Es handelt sich dabei namentlich um die Frage, ob eine derartige Function stets *existirt*.

§ 3.

Definition der Potentiale W, w. Berechnung von w.

Auf der gegebenen geschlossenen *Curve* oder *Fläche* σ seien irgend welche Werthe f in bestimmter Weise vorgeschrieben. Denkt man sich nun irgendwo in der *Ebene* resp. im *Raume* einen Punkt x markirt, und die Abstände dieses Punktes von den einzelnen Elementen $d\sigma$ jener Curve oder Fläche σ mit E bezeichnet, so repräsentirt der Ausdruck

$$V_x = \int \left(\log \frac{1}{E}\right) f d\sigma, \quad \text{resp.} \quad V_x = \int \frac{f d\sigma}{E}$$

(in der Ebene) (im Raume)

dasjenige *Potential*, welches auf x ausgeübt wird von einer auf σ ausgebreiteten materiellen *Belegung* von der *Dichtigkeit* f. Dabei pflegt insbesondere der Ausdruck links als *Logarithmisches*, der rechts als *Newton'sches* Potential bezeichnet zu werden. Diese beiden Potentiale, welche, unter Anwendung der schon mehrfach gebrauchten Bezeichnungsweise $T = \log \frac{1}{E}$, resp. $= \frac{1}{E}$, in die gemeinschaftliche Form:

$$V_x = \int T f d\sigma$$

versetzbar, und vielfach untersucht sind, sollen hier nicht weiter besprochen werden.

Von besonderer Wichtigkeit hingegen für unsere Zwecke ist derjenige Ausdruck, welcher aus V_x sich ergiebt, sobald man daselbst das T durch $\frac{dT}{d\nu}$ ersetzt, wo ν die *innere* Normale der Curve oder Fläche σ vorstellen soll. Der so entstehende Ausdruck:

$$W_x = \int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma$$

pflegt ebenfalls als ein auf den Punkt x ausgeübtes *Potential* bezeichnet zu werden, und zwar als das Potential einer auf σ ausgebreiteten materiellen *Doppelbelegung* vom *Momente* f.

Bei der genauern Untersuchung dieses Potentials W_x wird es zweckmässig sein, das f durch $\frac{f}{h\pi}$ zu ersetzen, wo h wiederum die schon früher eingeführte Zahl sein soll, die *in der Ebene* $= 1$, *im Raume* $= 2$ ist. [Vgl. die Note pag. 17.] Der so entstehende Ausdruck:

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma \tag{1.}$$

kann übrigens, wie man leicht erkennt, auch in folgende Form versetzt werden:

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{\cos\delta}{E^h} f\, d\sigma\ , \tag{1a.}$$

wo δ den Winkel vorstellt, unter welchem die Entfernung E $(d\sigma \rightarrowtail x)$ gegen die auf $d\sigma$ errichtete *innere* Normale ν geneigt ist. Bezeichnet man die *scheinbare Grösse* des Elementes $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter mit $\pm(d\sigma)_x$, und zwar mit $+(d\sigma)_x$ oder $-(d\sigma)_x$, je nachdem der Beobachter die *innere* oder *äussere* Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat*), so kann das Potential W_x schliesslich auch so dargestellt werden:

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma_x)\ . \tag{1b.}$$

Denn es ist:

$$\frac{dT}{d\nu}\, d\sigma = \frac{\cos\delta}{E^h}\, d\sigma = (d\sigma)_x\ ; \tag{2.}$$

wie sich solches durch einfache Betrachtungen leicht ergiebt.

Für den speciellen Fall: $f = 1$ mag das Potential W_x mit w_x bezeichnet werden. Alsdann hat man die mit (1.), (1a.), (1b.) analogen Formeln:

$$w_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\, d\sigma\ , \tag{3.}$$

$$w_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{\cos\delta}{E^h}\, d\sigma\ , \tag{3a.}$$

$$w_x = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_x\ . \tag{3b.}$$

*) Die *innere* Normale des Elementes $d\sigma$ ist die in das Gebiet $\mathfrak{J}$ hineinlaufende. Und ebenso ist die *innere* Seite von $d\sigma$ diejenige, die dem Gebiet $\mathfrak{J}$ *zugewendet* ist.

Es handelt sich nun darum, *die allgemeinen Eigenschaften der* Potentiale W_x, w_x, *ihre Stetigkeit resp. Unstetigkeit, ihr Verhalten in den unendlich fernen Punkten, u. s. w.*, näher zu untersuchen.

Wir stellen uns zuvörderst die Aufgabe, das in (3b.) enthaltene Integral

$$\int (d\sigma)_x$$

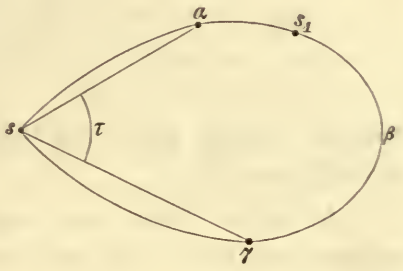
wirklich zu berechnen in der *Ebene* für irgend eine geschlossene Curve σ, z. B. für diejenige Curve σ, welche weiter unten gezeichnet ist. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Punkt x *ausserhalb* σ, oder *innerhalb* σ, oder endlich *auf* σ gelegen ist. Befindet sich x *ausserhalb* σ, so ergiebt sich sofort, falls man nur die geometrische Bedeutung des $(d\sigma)_x$ im Auge behält, die Formel:

$$(A.) \qquad \int (d\sigma)_x = 0 \ , \qquad (x \text{ ausserhalb } \sigma) \ .$$

Liegt ferner x *innerhalb* σ, so ergiebt sich mit gleicher Leichtigkeit, ebenfalls auf Grund der geometrischen Bedeutung von $(d\sigma)_x$, die Formel:

$$(B.) \qquad \int (d\sigma)_x = 2\pi \ , \qquad (x \text{ innerhalb } \sigma) \ .$$

Liegt endlich x *auf* der Curve σ, z. B. in der Ecke s, so thut man gut, das in Rede stehende Integral $\int (d\sigma)_x$ oder vielmehr $\int (d\sigma)_s$ nicht sofort über die *ganze* Curve σ, sondern zuerst nur über den mit $\alpha\beta\gamma$ bezeichneten *Theil* derselben auszudehnen. Man erhält alsdann, wiederum auf Grund der geometrischen Bedeutung von $(d\sigma)_s$, die Formel:



$$\int_{\alpha\beta\gamma} (d\sigma)_s = \tau \ ,$$

wo τ den *Winkel* $\alpha s \gamma$ repräsentirt, während der Index $\alpha\beta\gamma$ andeuten soll, dass die Integration nur über den *Curventheil* $\alpha\beta\gamma$ ausgedehnt zu denken ist. Lässt man aber jetzt in dieser Formel den Curventheil $\alpha\beta\gamma$ nach beiden Seiten hin mehr und mehr wachsen, nämlich α

nach s, und γ ebenfalls nach s rücken, so gewinnt die Formel folgende Gestalt:

$$(C.) \qquad \int (d\sigma)_s = \tau_s \,,$$

wo die Integration jetzt über die *ganze* Curve σ sich ausdehnt, und τ_s den *Innenwinkel* der Curve im Punkte s bezeichnet. Dieser Innenwinkel τ_s hat zu Schenkeln die beiden *Tangenten* der Curve im Punkte s. — In ganz analoger Weise kann man den Fall behandeln, dass der Punkt x *auf* der Curve an irgend welcher *andern* Stelle, z. B. in s_1 liegt [vgl. die Figur]. Man erhält alsdann

$$(C_1.) \qquad \int (d\sigma)_{s_1} = \tau_{s_1} = \pi \,,$$

wo τ_{s_1} den *Innenwinkel* der Curve im Punkte s_1 vorstellt. Dieser Innenwinkel τ_{s_1} ist aber offenbar $= \pi$, weil der Punkt s_1 kein Eckpunkt der Curve ist, vielmehr an einer Stelle liegt, wo die Curve einer *stetigen Biegung* sich erfreut, [vergl. die Figur].

Wir wollen nun weiterhin jeden Punkt der Ebene, je nachdem derselbe *ausserhalb*, *auf*, oder *innerhalb* σ liegt, mit a, s oder i bezeichnen. Und überdies wollen wir den *Innenwinkel* der Curve σ in irgend einem Punkte s mit $\pi(1 - \vartheta_s)$ bezeichnen, also setzen:

$$(D.) \qquad \begin{aligned} \tau_s &= \pi(1 - \vartheta_s) \,, \\ \tau_{s_1} &= \pi(1 - \vartheta_{s_1}) \,, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Alsdann gelangt man, auf Grund der Formeln $(A.)$, $(B.)$, $(C.)$, $(C_1.)$, zu folgendem Satz:

Ist in der Ebene eine geschlossene Curve σ von beliebiger Gestalt gegeben [die also z. B. auch mit *Ecken* behaftet sein kann], *und bezeichnet man jedweden Punkt x der Ebene mit a, s oder i, jenachdem derselbe ausserhalb σ, auf σ, oder innerhalb σ liegt, so gelten die Formeln:*

$$(4.) \qquad \begin{aligned} \int (d\sigma)_a &= 0 \,, \\ \int (d\sigma)_s &= \pi(1 - \vartheta_s) \,, \\ \int (d\sigma)_i &= 2\pi \,, \end{aligned}$$

wo $\pi(1 - \vartheta_s)$ den Innenwinkel der Curve σ im Punkte s bezeichnet.

Hieraus ergeben sich für die Function w_x (3 *b.*), falls man nur beachtet, dass die Zahl h in der Ebene $= 1$ sein soll, folgende Werthbestimmungen:

$$(5.) \qquad \begin{aligned} w_a &= \frac{1}{\pi}\int (d\sigma)_a = 0 \,, \\ w_s &= \frac{1}{\pi}\int (d\sigma)_s = 1 - \vartheta_s \,, \\ w_i &= \frac{1}{\pi}\int (d\sigma)_i = 2 \,. \end{aligned}$$

Erste Bemerkung. — Der *Innenwinkel* τ_s der Curve σ im Punkte s ist stets $= \pi$, ausser wenn s in einer Ecke der Curve liegt. Zufolge der in (*D.*) für ϑ_s gegebenen Definition:

$$(\alpha.) \qquad \tau_s = \pi(1 - \vartheta_s)$$

wird daher ϑ_s stets $= 0$ sein, ausser wenn s in einer Ecke der Curve liegt.

Zweite Bemerkung. — Der *Innenwinkel* τ_s liegt seiner Natur nach unter allen Umständen zwischen 0 und 2π:

$$0 \leqq \tau_s \leqq 2\pi.$$

Und diese Formel ist, sobald man voraussetzt, dass die Curve *keine Spitzen* haben soll, noch weiter verschärfbar, nämlich ersetzbar durch

$$0 < \tau_s < 2\pi \,.$$

Demgemäss ergiebt sich mit Rücksicht auf ($\alpha.$):

$$0 < 1 - \vartheta_s < 2 \,,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\beta.) \qquad -1 < \vartheta_s < +1 \,.$$

Die Grösse ϑ_s ist somit ein positiver oder negativer ächter Bruch.

Dritte Bemerkung. — Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, die Curve σ sei *überall convex*, indem wir dabei unter einer überall convexen Curve auch eine solche verstehen, die (wie z. B. die Peripherie eines Kreissectors) zum Theil aus *geraden Linien* besteht, oder auch eine solche, die (wie z. B. die Peripherie eines Quadrates) aus *lauter* geraden Linien besteht. Für eine solche *überall convexe* Curve σ wird offenbar der irgend einem Punkte s entsprechende *Innenwinkel* τ_s stets zwischen 0 und π liegen:

$$0 \leqq \tau_s \leqq \pi \,.$$

Diese Formel ist, sobald man wiederum voraussetzt, dass die Curve *keine Spitzen* besitzt, weiter verschärfbar, nämlich ersetzbar durch:

$$0 < \tau_s \leqq \pi \,.$$

Substituirt man hier für τ_s den Werth ($\alpha.$), so folgt:

$$0 < 1 - \vartheta_s \leqq 1 \,,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\gamma.) \qquad 0 \leqq \vartheta_s < 1 \,.$$

Für eine überall convexe Curve ist somit ϑ_s ein positiver ächter Bruch.

Analoge Resultate ergeben sich offenbar im *Raume* für eine *geschlossene Fläche* σ. In der That wird man alsdann, an Stelle der Formeln (4.), folgende Formeln erhalten:

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \int (d\sigma)_a &= 0 \ , \\ \int (d\sigma)_s &= 2\pi(1 - \vartheta_s) \ , \\ \int (d\sigma)_i &= 4\pi \ , \end{aligned}$$

und an Stelle der Formeln (5.) folgende:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} w_a &= \frac{1}{2\pi}\int (d\sigma)_a = 0 \ , \\ w_s &= \frac{1}{2\pi}\int (d\sigma)_s = 1 - \vartheta_s \ , \\ w_i &= \frac{1}{2\pi}\int (d\sigma)_i = 2 \ . \end{aligned}$$

Dabei ist der *räumliche* (vulgo: körperliche) *Innenwinkel* τ_s der gegebenen Fläche σ im Punkte s durch $2\pi(1 - \vartheta_s)$ bezeichnet. Dieser räumliche Innenwinkel hat zu seiner Begrenzung die Gesammtheit der im Punkte s an die Fläche σ gelegten *Tangentialebenen*. Ueber die in dieser Weise definirte Grösse ϑ_s sind nun folgende Bemerkungen zu machen, analog mit denen auf p. 31.

Erste Bemerkung. — Es ist, wie soeben festgesetzt wurde:

$$(\alpha.)\qquad \tau_s = 2\pi\,(1 - \vartheta_s) \ .$$

Und hieraus ergiebt sich, *dass die Grösse* ϑ_s *stets* $= 0$ *ist, ausser wenn der Punkt* s *in einer Ecke oder Kante der Fläche* σ *liegt.*

Zweite Bemerkung. — Die Grösse ϑ_s entspricht der Formel:

$$(\beta.)\qquad -1 < \vartheta_s < +1 \ .$$

Dritte Bemerkung. — Ist insbesondere die gegebene Fläche σ eine *überall convexe* [wobei unter diesem Namen auch solche Flächen mit einbegriffen sein sollen, die zum Theil *ebenflächig* sind], so entspricht ϑ_s der Formel:

$$(\gamma.)\qquad 0 \leqq \vartheta_s < 1 \ .$$

Man kann schliesslich die Formelsysteme (5.) und (7.) zusammenfassen, indem man sich folgendermassen ausdrückt:

Ist in der Ebene oder im Raume irgend eine geschlossene Curve oder Fläche σ *gegeben* [die z. B. mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein kann], *und bezeichnet man jedweden Punkt, je*

nachdem derselbe ausserhalb σ, auf σ, oder innerhalb σ liegt, mit a, s oder i, so gelten die Formeln:

$$w_a = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_a = 0\ ,$$

$$w_s = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_s = 1 - \vartheta_s\ , \tag{8.}$$

$$w_i = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_i = 2\ ,$$

wo $h = 1$ resp. $= 2$ ist, und wo $h\pi(1 - \vartheta_s)$ den ebenen Innenwinkel der Curve σ im Punkte s, resp. den räumlichen Innenwinkel der Fläche σ im Punkte s vorstellt. Man kann etwa diese Grösse $h\pi(1 - \vartheta_s)$ kurzweg das innere Winkelmaass der Curve oder Fläche σ im Punkte s nennen.

Dabei ist zu beachten, dass die Grösse ϑ_s stets

$$= 0 \tag{9.}$$

ist, ausser wenn der Punkt s in einer Ecke der Curve σ, resp. in einer Ecke oder Kante der Fläche σ liegt; — und ferner zu beachten, dass ϑ_s stets der Formel entspricht:

$$-1 \leqq \vartheta_s \leqq +1\ . \tag{10.}$$

Ist insbesondere die Curve oder Fläche σ eine überall convexe, so tritt an Stelle des Spielraumes (10.) der engere Spielraum:

$$0 \leqq \vartheta_s \leqq 1\ . \tag{11.}$$

Dabei sind unter überall convexen Curven oder Flächen auch solche verstanden, die zum Theil geradlinig resp. ebenflächig sind.

Die Formeln (10.), (11.) ergeben sich unmittelbar aus den Bemerkungen pag. 31 und 32. Setzt man voraus, dass die gegebene Curve oder Fläche σ frei von *Spitzen*, resp. frei von *Spitzen und Schneiden* ist, so sind diese Formeln, wie aus jenen Bemerkungen folgt, noch weiter verschärfbar, nämlich ersetzbar durch:

$$-1 < \vartheta_s < +1\ , \tag{10a.}$$

respective durch:

$$0 \leqq \vartheta_s < 1\ . \tag{11a.}$$

Uebrigens wird im ganzen Verlauf der gegenwärtigen Abhandlung nur von den Formeln (10.), (11.) Gebrauch gemacht werden. Eine Ausnahme macht allein der § 6a. In diesem nämlich sind die *acuten* Formeln (10a.), (11a.) erforderlich.

Zu den soeben ausgesprochenen aus der *geometrischen Anschauung* herstammenden Sätzen (8.), (9.), (10.), (11.) resp. (10a.), (11a.), mögen noch zwei weitere Sätze hinzugefügt werden, von denen später Gebrauch zu machen ist, und die aus derselben Quelle herstammen. Dieselben lauten:

Ist in der Ebene oder im Raume eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, und setzt man:

$$\int d\sigma = \Sigma \,, \tag{12.}$$

so ist Σ eine positive endliche Constante. In der That wird dieses Σ nichts Anderes sein, als der *Umfang* der gegebenen Curve, resp. das *Areal* (Complanationsresultat) der gegebenen Fläche.

Bezeichnet man ferner den absoluten Werth von $(d\sigma)_x$ mit $\operatorname{abs}(d\sigma)_x$, *und setzt man das über die gegebene Curve oder Fläche σ ausgedehnte Integral*

$$\int \operatorname{abs}(d\sigma)_x = \Phi_x \,, \tag{13.}$$

und bezeichnet man den grössten Werth, den die so definirte (stets positive) Function Φ_x für beliebige Lagen des Punktes x anzunehmen im Stande ist, mit M, so wird dieses M eine der gegebenen Curve oder Fläche σ zugehörige positive Constante sein, deren Werth stets ein endlicher ist.

Bemerkung. — All' diese Sätze (8.), (9.) ... (13.) beruhen, wie schon mehrfach betont ist, wesentlich auf der *geometrischen Anschauung*, und sind daher hinsichtlich ihrer *allgemeinen* Gültigkeit anfechtbar. Ohne auf solche Bedenken mich hier weiter einzulassen, will ich nur bemerken, dass die genannten Sätze das wesentliche Fundament der nachfolgenden Untersuchungen ausmachen, *und dass also die Gültigkeit dieser Untersuchungen auf solche Curven oder Flächen sich beschränkt, für welche die genannten Sätze correct sind.*

§ 4.

Allgemeine Eigenschaften des Potentials W.

Nachdem wir im vorhergehenden § das *specielle* Potential w_x untersucht haben, wollen wir gegenwärtig das *allgemeine* Potential

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma = \frac{1}{h\pi}\int \frac{\cos\delta}{E^h} f\, d\sigma = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \,, \tag{1.}$$

[vgl. (1a., b., c.) pag. 28] einer genaueren Betrachtung unterwerfen.

Wir werden dabei schliesslich zu dem einfachen Resultate gelangen, dass dieses Potential W_x, was seine Werthe *innerhalb* der gegebenen Curve oder Fläche σ betrifft, eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ ist, dass dasselbe also den in (1.), (2.) pag. 16 angegebenen Bedingungen entspricht. Und gleichzeitig werden wir zu dem Resultate geführt werden, dass dieses Potential W_x, was seine Werthe *ausserhalb* σ betrifft, eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ ist, dass nämlich dasselbe den in (1.), (2.), (3.), (4.) pag. 21 genannten Bedingungen sich subordinirt.

Dabei wird allerdings stets *vorausgesetzt* werden, dass die Werthe f, auf Grund deren das Potential W_x gebildet ist, auf der Curve oder Fläche σ überall *stetig* sind. — Zuvörderst ergeben sich folgende Sätze:

Erster Satz. — *Sind auf der geschlossenen Curve oder Fläche* σ [die mit Ecken, resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf] *irgend welche Werthe* f *oder* f_s *vorgeschrieben, die auf* σ *stetig sind, und setzt man:*

$$W = W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x ,$$

so werden die nach den Coordinaten x, y, *resp.* x, y, z *des Punktes* x *gebildeten Differentialquotienten beliebiger Ordnung:*

$$\frac{\partial^{p+q} W}{\partial x^p \partial y^q}, \quad resp. \quad \frac{\partial^{p+q+r} W}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} ,$$

und ebenso auch W *selber durchweg stetig sein, so lange der Punkt* x *von der gegebenen Curve oder Fläche* σ *durch irgend welche Zwischenräume getrennt bleibt. Und gleichzeitig wird, so lange dieser Anforderung Genüge geschieht, die Gleichung erfüllt sein:*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 , \quad resp. \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0 .$$

Zweiter Satz. — *Die Function* W_x *verschwindet im Unendlichen, d. h. sie wird* $= 0$, *falls man den Punkt* x *nach irgend welcher Richtung sich ins Unendliche entfernen lässt.*

Oder genauer ausgedrückt: Beschreibt man um irgend einen festen Punkt mit sehr grossem Radius R *eine Kreislinie oder Kugelfläche* S, *so sind die ausserhalb* S *befindlichen Werthe* W *durch Vergrösserung von* R *unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar.*

Dritter Satz. — *Construirt man irgend eine Kreislinie oder Kugelfläche s, welche die gegebene Curve oder Fläche σ umschliesst, und vollständig innerhalb 𝔄 liegt, so wird das über diese Kreislinie oder Kugelfläche s ausgedehnte Integral*

$$\int \frac{dW}{dn} ds \text{ stets} = 0$$

sein. Dabei bezeichnet n die Normale von s.

Der Beweis des ersten Satzes ergiebt sich leicht auf Grund des in (1.) für W_x angegebenen Ausdruckes

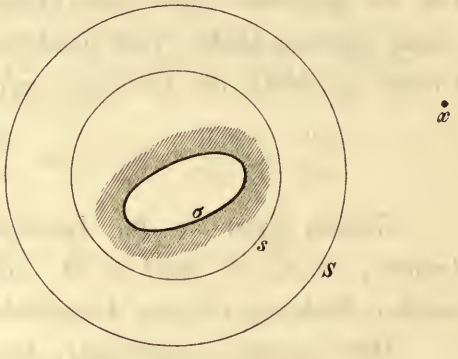
$$W = W_x = \frac{1}{h\pi} \int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma \ ,$$

falls man nur beachtet, dass $T = \log \frac{1}{E}$, resp. $= \frac{1}{E}$ ist, und dass E die *Entfernung* des Punktes x vom Elemente $d\sigma$ vorstellt. Will man den Satz mit voller Strenge und zugleich mit einiger Kürze beweisen, so kann man sich dazu derjenigen Hülfssätze bedienen, welche von mir angegeben sind in meinem Werke über das Log. und Newton'sche Potential (bei Teubner, 1877; daselbst pag. 141, 142).

Beweis des zweiten Satzes. — Nach (1.) ist:

$$W_x = \frac{1}{h\pi} \int \frac{\cos \delta}{E^h} f d\sigma \ . \tag{2.}$$

Wir beschreiben um irgend einen festen Punkt mit beliebigen Radien r, R ($r < R$) zwei Kreislinien oder Kugelflächen s, S, jedoch der Art, dass s (mithin auch S) die gegebene Curve oder Fläche σ *umschliesst*. Betrachten wir nun irgend einen *ausserhalb S* gelegenen Punkt x, so sind die ihm zugehörigen E's [d. i. seine Abstände von den einzelnen Elementen $d\sigma$ der gegebenen Curve oder Fläche σ] durchweg $> (R - r)$; so dass also für jedes solches E die Formel stattfindet:



$$\frac{1}{E} < \frac{1}{R - r} \ .$$

Bezeichnet man also den *absolut grössten* Werth von f auf σ mit M, so folgt aus (2.):

$$\text{abs } W_x < \frac{M}{h\pi (R-r)^h} \int d\sigma \ ,$$

also mit Rücksicht auf (12.) pag. 34.:

$$\text{(3.)} \qquad \text{abs } W_x < \frac{M\Sigma}{h\pi (R-r)^h} \ .$$

Diese Formel (3.), in welcher M, Σ, h gegebene *endliche* Constanten vorstellen ($h = 1$, resp. $= 2$), gilt für sämmtliche Punkte x, die *ausserhalb* S liegen. Demgemäss folgt aus dieser Formel, dass sämmtliche W_x, die *ausserhalb* S liegen, durch Vergrösserung von S, d. i. durch Vergrösserung des Radius R, unter einen beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind. — *Q. e. d.*

Beweis des dritten Satzes. — Wir wollen den Satz beweisen für die schon construirte Kreislinie oder Kugelfläche $s\,(r)$, indem wir dabei der Linie oder Fläche $S\,(R)$ als eines *Hülfskreises* oder einer *Hülfskugelfläche* uns bedienen, [vgl. die vorhergehende Figur]. Auf Grund des *ersten* Satzes pag. 35, und unter Anwendung der bekannten Green'schen Formeln, ergiebt sich zuvörderst die Gleichung:

$$\int \frac{dW}{dr} ds = \int \frac{dW}{dR} dS \ ,$$

oder was dasselbe ist:

$$\int \frac{dW}{dn} ds = \int \frac{dW}{dN} dS \ ,$$

wo n und N die *inneren* Normalen von s und S vorstellen sollen. Hieraus folgt sofort:

$$\text{abs} \int \frac{dW}{dn} ds = \text{abs} \int \frac{dW}{dN} dS \ ,$$

mithin:

$$\text{(4.)} \qquad \text{abs} \int \frac{dW}{dn} ds \leqq \int \left(\text{abs } \frac{dW}{dN}\right) dS \ .$$

Das hier auf der rechten Seite befindliche $\frac{dW}{dN}$ ist, nach (1.), in folgender Weise darstellbar:

$$(\alpha.) \qquad \frac{dW}{dN} = \frac{1}{h\pi} \int \frac{d^2T}{d\nu\, dN} f d\sigma \ ,$$

wo $T = \log \frac{1}{E}$, resp. $= \frac{1}{E}$ ist, und E den gegenseitigen Abstand

zweier Elemente $d\sigma$, dS vorstellt, während ν, N die *inneren* Normalen dieser Elemente bezeichnen. Demgemäss ergiebt sich, mittelst elementarer Rechnung:

$$\frac{d^2T}{d\nu\, dN} = \frac{\cos\varepsilon - (h+1)\cos\delta\cos\Delta}{E^{h+1}} ,$$

wo ε der Neigungswinkel von ν gegen N ist, während δ und Δ die Winkel vorstellen, unter denen ν und N gegen die Linie $E(d\sigma \rightarrowtail dS)$ geneigt sind. Beachtet man, dass $h = 1$ resp. $= 2$ ist, so ergiebt sich aus der letzten Formel sofort:

$$\text{abs}\,\frac{d^2T}{d\nu\, dN} \leqq \frac{h+2}{E^{h+1}} ,$$

also, weil $E > R - r$ ist, *a fortiori*:

$$\text{abs}\,\frac{d^2T}{d\nu\, dN} < \frac{h+2}{(R-r)^{h+1}} .$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (α.) sofort:

$$(\beta.) \qquad \text{abs}\,\frac{dW}{dN} < \frac{h+2}{h\pi\,(R-r)^{h+1}} \int (\text{abs}\, f)\, d\sigma ,$$

oder falls man den absolut grössten Werth von f auf σ mit M bezeichnet, und überdies beachtet, dass $\int d\sigma = \Sigma$ ist [vgl. (12.) pag. 34]:

$$(\gamma.) \qquad \text{abs}\,\frac{dW}{dN} < \frac{(h+2)M\Sigma}{h\pi\,(R-r)^{h+1}} .$$

Dies in (4.) substituirt, erhält man jetzt:

$$(5.) \qquad \text{abs}\int \frac{dW}{dn}\, ds < \frac{(h+2)M\Sigma}{h\pi\,(R-r)^{h+1}} \int dS ,$$

also, weil $\int dS = 2R\pi$, resp. $= 4R^2\pi$, mithin allgemein $= 2h\,R^h\pi$ ist:

$$(6.) \qquad \text{abs}\int \frac{dW}{dn}\, ds < \frac{2(h+2)M\Sigma \,.\, R^h}{(R-r)^{h+1}} .$$

Der hier auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist aber, weil M, Σ, r, h gegebene Constanten vorstellen ($h = 1$, resp. $= 2$), durch Vergrösserung von R unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar. Somit ergiebt sich, dass das der gegebenen Kreislinie oder Kugelfläche s entsprechende Integral

$$\int \frac{dW}{dn}\, ds$$

nothwendig $= 0$ ist. — *Q. e. d.*

Weitere Untersuchungen. — Nach dem ersten Satz (pag. 35) ist W_x *stetig*, so lange der Punkt x von der gegebenen Curve oder Fläche σ durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Zwischenräume getrennt bleibt. Es fragt sich, ob diese Stetigkeit fortdauert bis *hart* an σ heran. Um auf diese Frage, deren Beantwortung nicht ganz leicht ist, näher einzugehen, wollen wir neben der Function

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \tag{7.}$$

gleichzeitig auch die speciellere Function

$$w_x = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_x \tag{8.}$$

in Betracht ziehen, und den Ausdruck bilden:

$$\Omega_x = W_x - k w_x \ , \tag{9.}$$

wo k eine noch disponible *Constante* sein soll. Durch Substitution der Werthe (7.), (8.) ergiebt sich:

$$\Omega_x = \int \frac{f-k}{h\pi}(d\sigma)_x \ . \tag{10.}$$

Wir markiren nun *auf* σ irgend einen Punkt $\varkappa$, beschreiben um $\varkappa$ (als Centrum) eine Kreislinie oder Kugelfläche $O_\varkappa$ von noch unbestimmter Kleinheit, und nehmen zur Constanten k denjenigen Werth, welchen die auf σ vorgeschriebene Function f im Punkte $\varkappa$ besitzt:

$$k = f_\varkappa \ . \tag{11.}$$

Durch die kleine Kreislinie oder Kugelfläche $O_\varkappa$ zerfällt die gegebene Curve oder Fläche σ in zwei Theile, von denen der *innerhalb* $O_\varkappa$ liegende mit σ', der *ausserhalb* $O_\varkappa$ befindliche mit σ'' benannt werden mag. Diese kleine Kreislinie oder Kugelfläche $O_\varkappa$ bildet alsdann die *Grenze* zwischen σ' und σ'', und soll auch stets diese Grenze *bleiben*; so dass also z. B. bei einer *Verkleinerung* von $O_\varkappa$ der Theil σ' sich ebenfalls *verkleinern*, der Theil σ'' hingegen sich *vergrössern* wird.

Den beiden Theilen σ' und σ'' entsprechend, zerfällt das Integral (10.) ebenfalls in zwei Theile, die mit Ω_x' und Ω_x'' bezeichnet

werden mögen; wie solches angedeutet sein mag durch die Formel:

$$(12.) \qquad \Omega_x = \underbrace{\int \frac{f-k}{h\pi}(d\sigma')_x}_{\Omega_x'} + \underbrace{\int \frac{f-k}{h\pi}(d\sigma'')_x}_{\Omega_x''} .$$

Alsdann ist also:

$$\Omega_x = \Omega_x' + \Omega_x'' ,$$

und falls man für x irgend einen *anderen* Punkt y nimmt:

$$\Omega_y = \Omega_y' + \Omega_y'' ,$$

mithin:

$$\Omega_x - \Omega_y = \Omega_x' + (-1)\,\Omega_y' + (\Omega_x'' - \Omega_y'') ,$$

folglich:

$$(13.) \quad \text{abs}\,(\Omega_x - \Omega_y) \leqq \text{abs}\,\Omega_x' + \text{abs}\,\Omega_y' + \text{abs}\,(\Omega_x'' - \Omega_y'') ,$$

wobei über die Lage der Punkte x, y nicht die mindeste Voraussetzung gemacht ist.

Für Ω_x' ergiebt sich sofort die Formel [vgl. (12.)]:

$$\text{abs}\,\Omega_x' \leqq \int \frac{\text{abs}\,(f-k)}{h\pi}\,\text{abs}\,(d\sigma')_x ,$$

oder, falls man den absolut grössten Werth von $(f-k)$ auf σ' mit M' bezeichnet:

$$\text{abs}\,\Omega_x' \leqq \frac{M'}{h\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma')_x ,$$

also *a fortiori*:

$$\text{abs}\,\Omega_x' \leqq \frac{M'}{h\pi}\left(\int \text{abs}\,(d\sigma')_x + \int \text{abs}(d\sigma'')_x\right) ,$$

oder was dasselbe ist:

$$\text{abs}\,\Omega_x' \leqq \frac{M'}{h\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma)_x ,$$

also mit Rücksicht auf den Satz (13.) pag. 34:

$$(A.) \qquad \text{abs}\,\Omega_x' \leqq \frac{M'\mathsf{M}}{h\pi} ,$$

wo M eine der gegebenen Curve oder Fläche σ zugehörige *positive endliche Constante* vorstellt.

Ist O_x, mithin auch σ' sehr klein, so werden die *auf* σ' vorhandenen Werthe f (weil f nach unserer Voraussetzung *stetig* ist)

sehr wenig von einander abweichen, also z. B. auch sehr wenig abweichen von demjenigen Werthe k, den die Function f auf σ' im Centrum von O_z d. i. in z besitzt. Demgemäss wird die Differenz $f - k$ für alle *auf* σ' liegenden Punkte *sehr klein* sein, mithin der absolut grösste Werth M', den diese Differenz auf σ' besitzt, ebenfalls *sehr klein* sein. Kurz, man erkennt (auf Grund der *Stetigkeit* von f), dass jenes M' durch Verkleinerung der Kreislinie oder Kugelfläche O_z und durch die damit Hand in Hand gehende Verkleinerung von σ' *beliebig* klein, z. B. *so* klein gemacht werden kann, dass der Quotient

$$\frac{M'\mathsf{M}}{h\pi} < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird, wo ε einen willkürlich gegebenen Kleinheitsgrad vorstellen soll. Solches aber ausgeführt gedacht, ergiebt sich aus (*A.*) die Formel:

$$(B.) \qquad \text{abs } \Omega_x' < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

ohne, dass bei Ableitung dieser Formel über die Lage des Punktes x auch nur die mindeste Voraussetzung gemacht wäre. Giebt man also dem Punkte x in der Ebene resp. im Raume irgend welche *andere* Lage y, so wird wiederum

$$(C.) \qquad \text{abs } \Omega_y' < \frac{\varepsilon}{3}$$

sein.

Die Formeln (*B.*), (*C.*) sind entstanden durch eine gewisse dem vorgeschriebenen ε entsprechende Verkleinerung von O_z und die damit Hand in Hand gehende Abänderung der Theile σ' und σ''. Nachdem solches ausgeführt ist, wollen wir jetzt diese geometrischen Gebilde O_z, σ', σ'' *erstarren* lassen, d. h. weiterhin *constant* erhalten. Hingegen wollen wir die bis jetzt in der Ebene resp. im Raume völlig frei beweglichen Punkte x, y fortan in das Innere einer um z (als Centrum) beschriebenen Kreislinie oder Kugelfläche o_z *hineinbannen*, und dabei den Radius von o_z gleich von Anfang uns noch kleiner denken als den von O_z. Durch eine *weitere Verkleinerung* von o_z werden wir offenbar dafür sorgen können, dass

$$(D.) \qquad \text{abs } (\Omega_x'' - \Omega_y'') \text{ stets} < \frac{\varepsilon}{3}$$

bleibt, welche Bewegung man den Punkten x, y innerhalb $o_\varkappa$ auch zuertheilen mag.

Denn das Integral Ω_x'' und ebenso Ω_y'' erstreckt sich nur über den *ausserhalb* $O_\varkappa$ gelegenen Theil σ'', und ist daher stetig für alle *innerhalb* $O_\varkappa$ befindlichen Punkte. *Innerhalb* $O_\varkappa$ befindet sich aber jene die Punkte x und y umschliessende kleine Kreislinie oder Kugelfläche $o_\varkappa$.

Jetzt endlich folgt aus (13.), mittelst der Formeln (*B.*), (*C.*), (*D.*), dass

$$\text{(14.)} \qquad \text{abs}\,(\Omega_x - \Omega_y)\ \text{stets} < \varepsilon$$

bleibt, welche Bewegung man den Punkten x und y innerhalb $o_\varkappa$ auch zuertheilen mag; so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Markirt man auf σ irgend einen Punkt $\varkappa$, und bezeichnet man den in $\varkappa$ vorhandenen Werth von f mit k, so werden die Werthdifferenzen, welche die Function

$$\text{(15.)} \qquad \Omega_x = W_x - k w_x$$

innerhalb einer um $\varkappa$ (als Centrum) beschriebenen Kreislinie oder Kugelfläche besitzt, durch Verkleinerung des Radius derselben unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein.

Oder kürzer ausgedrückt: Die Function Ω_x ist im Punkte $\varkappa$ stetig, mithin daselbst z. B. auch endlich.

Bemerkung. — Es wird nach (15.), falls man x nach $\varkappa$ rücken lässt:

$$(\alpha.) \qquad \Omega_\varkappa = W_\varkappa - k w_\varkappa\,,$$

oder mit Rücksicht auf (11.):

$$(\beta.) \qquad \Omega_\varkappa = W_\varkappa - f_\varkappa w_\varkappa\,.$$

Hier ist $\Omega_\varkappa$, wie soeben erläutert wurde, *endlich*. Gleiches aber gilt [in Folge der Stetigkeit von f] auch von $f_\varkappa$, und [auf Grund des Satzes (8) pag. 33] auch von $w_\varkappa$. Gleiches gilt daher, zufolge der Formel (β.), auch von $W_\varkappa$. Nun war aber der Punkt $\varkappa$ auf σ *ganz beliebig* markirt. Demgemäss erkennen wir, dass die Function $W_\varkappa$ *auf σ überall endlich* ist.

Nehmen wir ferner für x irgend einen Punkt *innerhalb* σ oder *ausserhalb* σ, so wird in diesem die Function W_x (erster Satz pag. 35) *stetig*, mithin auch *endlich* sein. Und diese Endlichkeit wird (vergl. den zweiten Satz pag. 35) auch dann noch fortbestehen, wenn wir den Punkt x in unendliche Ferne rücken lassen.

Demgemäss gelangen wir also zu dem Satz, *dass die Function W_x* (ebenso wie w_x) *in der ganzen Ebene resp. im ganzen Raume allenthalben endlich ist, wobei die unendlich fernen Punkte der Ebene resp. des Raumes mit einbegriffen sind.*

Man kann den Satz (15.), indem man für w_x seine Werthe [(8.) pag. 33] substituirt, wobei alsdann, was die Punkte x betrifft, zwischen den a, s und i zu unterscheiden ist, auch so aussprechen:

Markirt man auf σ irgend einen Punkt z, und bezeichnet man den in z vorhandenen Werth von f mit k, so wird die durch die Formeln

$$(16.)\qquad \begin{cases} \Omega_a = W_a , \\ \Omega_s = W_s - (1 - \vartheta_s)k , \\ \Omega_i = W_i - 2k \end{cases}$$

definirte Function Ω_x innerhalb einer um z beschriebenen Kreislinie oder Kugelfläche Werthe besitzen, deren Differenzen, durch Verkleinerung dieser Kreislinie oder Kugelfläche, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind.

Genau derselbe Satz gilt aber auch von denjenigen Functionen H_x und Z_x, die durch die Formeln definirt sind:

$$(17.)\quad \begin{cases} \mathsf{H}_a = 0 , \\ \mathsf{H}_s = -(1 - \vartheta_s)(f_s - k) , \\ \mathsf{H}_i = 0 , \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{Z}_a = 2k , \\ \mathsf{Z}_s = 2k + (1 + \vartheta_s)(f_s - k) , \\ \mathsf{Z}_i = 2k ; \end{cases}$$

wie man solches sofort erkennt, falls man nur beachtet, dass die Function f oder f_s (nach unserer Voraussetzung) auf σ *stetig* ist, und dass k den Werth dieser Function im Punkte z repräsentirt.

Genau derselbe Satz gilt daher z. B. auch von der aus Ω_x und H_x durch Addition entstehenden Function:

$$\Phi_x = \Omega_x + \mathsf{H}_x ,$$

ebenso von der Function:

$$\Psi_x = \Omega_x + \mathsf{Z}_x ;$$

wobei zu bemerken ist, dass für diese neuen Functionen Φ_x und Ψ_x aus (16.) und (17.) folgende Ausdrücke resultiren:

$$(18.)\quad \begin{cases} \Phi_a = W_a , \\ \Phi_s = W_s + \vartheta_s f_s - f_s , \\ \Phi_i = W_i - 2k , \end{cases} \qquad \begin{cases} \Psi_a = W_a + 2k , \\ \Psi_s = W_s + \vartheta_s f_s + f_s , \\ \Psi_i = W_i . \end{cases}$$

Genau derselbe Satz wird daher auch gelten für einen *Theil* dieser Functionswerthe, z. B. für die Φ_a, Φ_s (unter Fortlassung der Φ_i), ebenso für die Ψ_i, Ψ_s (unter Fortlassung der Ψ_a). Demgemäss wird also die durch die Formeln

$$(19.)\qquad \begin{cases} \Phi_a = W_a , \\ \Phi_s = W_s + \vartheta_s f_s - f_s \end{cases}$$

für alle Punkte a, s, d. i. für das Gebiet $\mathfrak{A}$ (inclusive σ) definirte Function Φ_x innerhalb einer um z beschriebenen Kreislinie oder

Kugelfläche Werthe besitzen, deren Differenzen, durch Verkleinerung des Radius dieser Kreislinie oder Kugelfläche, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind. *Und es wird daher diese Function* Φ_x *im Punkte* x *stetig zu nennen sein.*

Dabei repräsentirt x einen auf σ beliebig zu wählenden Punkt. Nimmt man an Stelle *eines* solchen Punktes x einen *anderen* (ebenfalls auf σ liegenden) Punkt x, so bleiben die Ausdrücke (19.) *genau dieselben* [was, beiläufig bemerkt, bei den früheren Ausdrücken (16.), (17.), (18.) *nicht* der Fall ist; denn jene sind mit x resp. k behaftet]; so dass man also sagen kann: *Die durch die Ausdrücke* (19.) *für alle* a, s, *d. i. für das Gebiet* $\mathfrak{A}$ (*inclusive* σ) *definirte Function* Φ_x *ist stetig für jedweden auf* σ *gelegenen Punkt* x. Oder, falls man den Buchstaben x mit s vertauscht: *Sie ist stetig für jedweden auf* σ *liegenden Punkt* s.

Sie ist andererseits aber auch stetig für jedweden innerhalb $\mathfrak{A}$ *liegenden Punkt* a. Denn innerhalb $\mathfrak{A}$ ist sie [nach (19.)] identisch mit W; und dass W innerhalb $\mathfrak{A}$ überall stetig ist, unterliegt [vgl. den ersten Satz pag. 35] keinem Zweifel. Demgemäss gelangen wir also zu folgendem eleganten Satz:

Die durch die Formeln

$$(20.) \qquad \begin{aligned} \Phi_a &= W_a \ , \\ \Phi_s &= W_s + \vartheta_s f_s - f_s \end{aligned}$$

definirte Function Φ *ist stetig in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{A}$. *Und hieraus folgt* [unter Hinzunahme des zweiten Satzes pag. 35], *dass sie in Erstreckung von* $\mathfrak{A}$ *auch überall endlich ist, miteingerechnet die unendlich fernen Punkte von* $\mathfrak{A}$.

Zu einem ganz analogen Resultat gelangt man, wie jetzt leicht zu übersehen ist, mit Bezug auf die in (18.) angegebenen Werthe Ψ_i, Ψ_s, nämlich zu folgendem Satz:

Die durch die Formeln

$$(21.) \qquad \begin{aligned} \Psi_i &= W_i \ , \\ \Psi_s &= W_s + \vartheta_s f_s + f_s \end{aligned}$$

definirte Function Ψ *ist stetig in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{J}$, *mithin daselbst auch überall endlich.*

Sie ist also z. B. auch stetig *auf der Grenze* von $\mathfrak{J}$. D. h. Ψ_s ist stetig auf σ. Gleiches aber gilt auf σ (nach unserer Voraus-

setzung) auch von f_s, folglich auch von der Differenz

$$\Psi_s - f_s ,$$

d. i. [nach (21.)] von der Function:

$$W_s + \vartheta_s f_s .$$

Und demgemäss ergiebt sich also der Satz:

Die Function

(22.) $$f_s' = W_s + \vartheta_s f_s$$

ist auf der gegebenen Curve oder Fläche σ überall stetig, mithin daselbst auch überall endlich.

Es handelt sich bei diesen Sätzen (20.), (21.) und (22.) eigentlich nur um die Function f und das von ihr abhängende Potential W. Wir müssen daher, nachdem die Richtigkeit jener drei Sätze einmal erkannt ist, auf Mittel und Wege bedacht sein, um die *überflüssigen* Buchstaben Φ, Ψ wieder los zu werden. Zu diesem Zwecke können wir jene Sätze selber uns dienstbar machen.

Da nämlich Φ, zufolge des Satzes (20.), *in Erstreckung von* $\mathfrak{A}$ *stetig* ist, so wird solches z. B. auch stattfinden innerhalb einer kleinen Kreislinie oder Kugelfläche o_s, die um irgend welchen auf σ markirten Punkt s (als Centrum) beschrieben ist. Die Abweichungen, welche die innerhalb o_s befindlichen Werthe Φ_a gegenüber dem Centralwerth Φ_s zeigen, sind also durch Verkleinerung des Radius von o_s unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar. Jene innerhalb o_s vorhandenen Werthe Φ_a *convergiren* also, falls man o_s ins Unendliche verkleinert, gegen jenen Centralwerth Φ_s. Oder noch kürzer ausgedrückt: *Der Centralwerth Φ_s ist der Convergenzwerth der benachbarten Φ_a.*

Dieser Satz aber wird, falls man für Φ_s und Φ_a ihre eigentlichen Ausdrücke (20.) substituirt, dahin auszusprechen sein, *dass der in s vorhandene Werth*

$$W_s + \vartheta_s f_s - f_s$$

den Convergenzwerth der benachbarten W_a repräsentirt. Um diese Beziehung anzudeuten, kann man schreiben:

$$\lim_{a=s} W_a = W_s + \vartheta_s f_s - f_s ,$$

oder einfacher:

$$W_{as} = W_s + \vartheta_s f_s - f_s ,$$

wo alsdann das Symbol W_{as} denjenigen Werth bezeichnet, gegen welchen die innerhalb o_s befindlichen W_a convergiren, sobald man den Radius

von o_s ins Unendliche verkleinert. Uebrigens kann man diese Formel für W_{as}, mit Rücksicht auf (22.), offenbar auch so schreiben:

$$W_{as} = f_s' - f_s \ .$$

Analoges ist zu bemerken beim Satze (21.). Und in solcher Weise gelangt man, auf Grund der Sätze (20.), (21.), (22.), zu folgendem Resultat:

Vierter Satz. — *Sind auf der geschlossenen Curve oder Fläche σ,* [die mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf] *irgend welche Werthe f oder f_s vorgeschrieben, die auf σ stetig sind, und setzt man:*

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \ , \tag{23.}$$

und setzt man überdies:

$$f_s' = W_s + \vartheta_s f_s \ , \tag{24.}$$

wo ϑ_s die schon früher [vgl. (8.) pag. 33] *angegebene Bedeutung haben soll, so sind die in solcher Weise definirten f' oder f_s' auf σ überall stetig**).

Das hier in (24.) *auftretende W_s repräsentirt den directen Werth des Integrales* (23.) *in einem auf σ gelegenen Punkte s, nämlich denjenigen Werth, welcher entsteht, wenn man in* (23.) *statt x den Punkt s eintreten lässt, und sodann die Integration ausführt.*

Ausser diesem directen Werthe W_s treten nun im Punkte s noch zwei andere Werthe von W, in mehr indirecter Weise, zu Tage. Denkt man sich nämlich um den Punkt s (als Centrum) *eine kleine Kreislinie oder Kugelfläche o_s construirt, so werden die innerhalb o_s vorhandenen Werthe W_a, falls man o_s ins Unendliche verkleinert, gegen einen bestimmten endlichen Werth convergiren, der mit W_{as} bezeichnet werden mag. Und ebenso werden bei dieser Procedur die innerhalb o_s vorhandenen Werthe W_i ebenfalls gegen einen bestimmten endlichen Werth convergiren, der W_{is} heissen mag. Diese dem betrachteten Punkte s zugehörigen, resp. aus den Gebieten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ herstammenden Convergenzwerthe W_{as} und W_{is} stehen zu den Functionen f und f' in einfacher Beziehung. Es gelten nämlich für jedweden Punkt s die Gleichungen:*

$$\begin{aligned} W_{as} &= f_s' - f_s \ , \\ W_{is} &= f_s' + f_s \ . \end{aligned} \tag{25.}$$

*) Dies ist der Satz (22).

Ferner bilden, was von hervorragender Wichtigkeit ist, die Werthe W_a *und* W_{as} *zusammengenommen ein Werthsystem, welches stetig ist in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{A}$ **). Und ebenso repräsentiren die* W_i *und* W_{is} *zusammengenommen ein zweites Werthsystem, welches stetig ist in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{J}$ ***).*

Insbesondere sei noch hervorgehoben, dass sämmtliche Werthe

$$W_s\,,\ W_a\,,\ W_{as}\,,\ W_i\,,\ W_{is} \tag{26.}$$

endlich sind, mitinbegriffen die in unendlicher Ferne vorhandenen W_a*; wie solches aus* (20.), (21.), (22.) *sich sofort ergiebt.*

Auf diese Weise dürfte das Resultat unserer letzten Untersuchungen einigermassen *übersichtlich* hingestellt sein. *Schärfer* ist jedenfalls das Resultat in seiner ursprünglichen Fassung, nämlich in (20.), (21.), (22.), ausgesprochen.

Wir können jetzt endlich den soeben ausgesprochenen *vierten Satz* mit den *drei früheren Sätzen*, die zu Anfang dieses § auf pag. 35 hingestellt wurden, zu *einem einzigen Theorem* zusammenziehen. Aus den genannten vier Sätzen ergiebt sich nämlich sofort, dass die Werthe W_a und W_{as} eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, und dass andererseits die Werthe W_i und W_{is} eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ repräsentiren. Man erkennt solches, falls man nur zurückblickt auf die für derartige Functionen gegebenen Definitionen pag. 16 und pag. 21. Wir haben somit folgendes Theorem:

Theorem. — *Denkt man sich auf einer geschlossenen Curve oder Fläche* σ, [die auch mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf] *irgend eine Function* f *vorgeschrieben, die daselbst stetig ist, und setzt man:*

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x\ ,$$

oder allgemeiner:

$$W_x = \text{Const.} + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x\ ,$$

so repräsentiren die Werthe W_a, W_{as} *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, *und die Werthe* W_i, W_{is} *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$.

---

*) Dies ist der Satz (20).

**) Dies ist der Satz (21.).

§ 5.

Ueber die mit dem Potential W zusammenhängenden unendlich vielen Functionen f, f', f'', f''', etc.

Eliminirt man aus den beiden Formeln (23.), (24.) pag. 46:

$$W_x = \frac{1}{h\pi} \int f(d\sigma)_x \ , \tag{1.}$$

$$f_s' = \vartheta_s f_s + W_s \tag{2.}$$

das W, so ergiebt sich zwischen den beiden Functionen f und f' folgende directe Beziehung:

$$f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi} \int f(d\sigma)_s \ . \tag{3.}$$

Nach unserer Voraussetzung ist die auf σ von Hause aus vorgeschriebene Function f auf σ überall *stetig*. Und Gleiches gilt, in Folge dessen, auch von der neuen Function f', [Satz (24.) pag. 46].

Denkt man sich also zu f und f' noch unendlich viele andere Functionen f'', f''', etc. hinzugefügt, und zwar der Art, dass in der Reihe:

$$f, f', f'', f''', \ldots f^{(n)}, \ldots \tag{4.}$$

jede Function aus der vorhergehenden in genau derselben Weise entstanden sein soll, wie f' aus f, so werden *all'* diese Functionen auf σ *stetig* sein. Bezeichnet man also z. B. die *kleinsten* und *grössten* Werthe, welche diese Functionen auf σ besitzen, resp. mit

$$K, K', K'', K''', \ldots K^{(n)}, \ldots , \tag{5.}$$

und mit:

$$G, G', G'', G''', \ldots G^{(n)}, \ldots , \tag{6.}$$

so werden all' diese Grössen (5.), (6.) bestimmte *endliche* Constanten sein. — Will man, was kaum nöthig sein dürfte, die Entstehungsweise der f', f'', f''', ... noch deutlicher vor Augen haben, so hat man nur die mit (3.) analogen Formeln hinzuschreiben:

$$\begin{aligned} f_s' &= \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi} \int f(d\sigma)_s \ , \\ f_s'' &= \vartheta_s f_s' + \frac{1}{h\pi} \int f'(d\sigma)_s \ , \\ f_s''' &= \vartheta_s f_s'' + \frac{1}{h\pi} \int f''(d\sigma)_s \ , \ . \end{aligned} \tag{7.}$$

etc. etc.

Wir wollen nun diese Functionen und die ihnen zugehörigen Constanten (5.), (6.) einer genaueren Untersuchung unterwerfen, *unter der Voraussetzung, dass die gegebene Curve oder Fläche σ überall convex ist, wobei unter diesem Namen auch solche Curven und Flächen mitinbegriffen sein sollen, die zum Theil geradlinig resp. ebenflächig sind.* Zufolge dieser Voraussetzung sind alsdann die Grössen

(8x.) $\qquad (d\sigma)_i\,,\ (d\sigma)_s\,,\ \vartheta_s$ durchweg *positiv*,

und überdies die ϑ_s der Formel unterworfen:

(8y.) $\qquad 0 \leqq \vartheta_s \leqq 1\,;$

wie solches theils aus der geometrischen Bedeutung der $(d\sigma)_x$ folgt [vgl. pag. 28], theils aus schon früher gemachten Bemerkungen sich ergiebt [vgl. (11.) pag. 33]. Dabei sei noch folgende Relation notirt [(8.) pag. 33]:

(8z.) $\qquad \int (d\sigma)_s = h\pi\,(1 - \vartheta_s)\,,$

von der mehrfach Gebrauch zu machen sein wird.

Die *rechte* Seite der Formel (3.) wird offenbar, weil die ϑ_s und $(d\sigma)_s$ durchweg *positiv* sind [vgl. (8x.)], *vergrössert* werden, sobald man alle daselbst vorkommenden f's durch ihren *grössten* Werth, d. i. durch G [vgl. (6.)] ersetzt. Somit ergiebt sich die Relation

$$f_s' \leqq G\left[\vartheta_s + \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_s\right];$$

und in analoger Weise auch folgende Relation:

$$f_s' \geqq K\left[\vartheta_s + \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_s\right].$$

Diese beiden Relationen gewinnen aber mit Rücksicht auf (8z.) die einfache Gestalt:

$$f_s' \leqq G\,,$$
$$f_s' \geqq K\,.$$

Diese Relationen werden, weil bei ihrer Ableitung über die Lage des Punktes s auf der gegebenen Curve oder Fläche σ keinerlei Voraussetzung gemacht ist, in Kraft bleiben für einen auf σ in *beliebiger Bewegung* begriffenen Punkt s. Und demgemäss werden also *sämmtliche* Werthe, welche die Function f' auf σ überhaupt besitzt, der Formel entsprechen:

(9.) $\qquad K \leqq f' \leqq G\,.$

Es wird daher diese Formel z. B. auch gelten für den *grössten* Werth von f', d. i. für G', desgleichen für ihren *kleinsten* Werth, d. i. für K'; sodass man erhält:

$$K \leqq K' \leqq G' \leqq G \ . \tag{10.}$$

Die Beziehung zwischen f und f' ist aber dieselbe, wie zwischen f' und f''. Ebenso also wie für die Functionen f und f' oder vielmehr für die diesen Functionen zugehörigen Constanten K, G und K', G' die Formel (10.) sich ergeben hat, — ebenso wird für die den Functionen f' und f'' entsprechenden Constanten K', G' und K'', G'' die analoge Formel sich herausstellen:

$$K' \leqq K'' \leqq G'' \leqq G' \ . \tag{10a.}$$

U. s. w. U. s. w.

Durch Combination all' dieser Formeln (10.), (10a.), etc. ergiebt sich jetzt sofort:

$$\begin{aligned} K &\leqq K' \leqq K'' \leqq K''' \leqq \ldots \\ G &\geqq G' \geqq G'' \geqq G''' \geqq \ldots \end{aligned} \tag{11.}$$

Demgemäss ist also [um einen schon früher benutzten Ausdruck zu brauchen, vgl. pag. 12] die Curve $KK'K'' \ldots$ eine *monoton steigende*, und die Curve $GG'G'' \ldots$ eine *monoton sinkende*.

Gelingt es uns also nachzuweisen, dass die Differenz $G^{(n)} - K^{(n)}$ durch Vergrösserung der Zahl n unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar ist, so wird hierdurch [vgl. pag. 13] zugleich nachgewiesen sein, dass die Function $f^{(n)}$ für $n = \infty$ in eine *bestimmte endliche Constante* sich verwandelt. *Und dies ist das eigentliche Ziel des gegenwärtigen Paragraphs:*

Wir haben den kleinsten und grössten Werth der Function f mit K und G bezeichnet. Wir wollen jetzt die gegebene Curve oder Fläche σ in *zwei Theile* α und β zerlegen, deren jeder aus beliebig vielen einzelnen Stücken bestehen darf, und zwar in solcher Weise, dass alle auf α vorhandenen f's zwischen K und $\frac{G+K}{2}$, andererseits alle auf β befindlichen f's zwischen $\frac{G+K}{2}$ und G liegen; was angedeutet sein mag durch die Formeln:

$$\begin{aligned} K \leqq f \leqq \frac{G+K}{2} \ , &\quad (\text{auf } \alpha) \ , \\ \frac{G+K}{2} \leqq f \leqq G \ , &\quad (\text{auf } \beta) \ . \end{aligned} \tag{12.}$$

Denkt man sich die Theile α und β in lauter unendlich kleine Elemente zerlegt, und diese Elemente resp. mit $d\alpha$ und $d\beta$ bezeichnet, so ist offenbar

$$(13.) \qquad \int d\alpha + \int d\beta = \int d\sigma = \Sigma \ ,$$

falls man nämlich das Integral $\int d\alpha$ über alle Elemente $d\alpha$ des Theiles α, ebenso $\int d\beta$ über alle Elemente $d\beta$ des Theiles β sich ausgedehnt denkt, und falls man überdies unter Σ (ebenso wie früher) den *Umfang* der gegebenen Curve σ, resp. das *Areal* der gegebenen Fläche σ versteht. Analog mit (13.) wird z. B. auch folgende Formel gelten:

$$(14.) \int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_s = \int (d\sigma)_s = h\pi(1 - \vartheta_s) \ , \ [\text{vgl. (8z.)}] \ ,$$

wo unter s ein beliebiger Punkt auf der gegebenen Curve oder Fläche σ zu verstehen ist. Da die $(d\sigma)_s$, mithin auch die $(d\alpha)_s$ und $(d\beta)_s$, durchweg *positiv* sind [vgl. (8x.)], so folgt aus (14.) sofort:

$$(15.) \qquad \begin{aligned} \int (d\alpha)_s &\leqq \int (d\sigma)_s = h\pi(1 - \vartheta_s) \ , \\ \int (d\beta)_s &\leqq \int (d\sigma)_s = h\pi(1 - \vartheta_s) \ . \end{aligned}$$

Solches constatirt, kehren wir zurück zur Formel (3.):

$$f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi} \int f (d\sigma)_s \ ,$$

und geben derselben folgende Gestalt:

$$f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi} \int f (d\alpha)_s + \frac{1}{h\pi} \int f (d\beta)_s \ .$$

Die hier auftretenden beiden Integrale werden offenbar [weil die $(d\alpha)_s$ und $(d\beta)_s$ sämmtlich *positiv* sind; vergl. (8x.)] *vergrössert* werden, sobald man alle in ihnen enthaltenen f's *vergrössert*. Solches aber geschieht nach (12.), sobald man die mit den Elementen $(d\alpha)_s$ multiplicirten f durch $\frac{G + K}{2}$, und die mit den $(d\beta)_s$ multiplicirten f durch G ersetzt. Man erhält also:

$$(A.) \qquad f_s' \leqq \vartheta_s f_s + \frac{G + K}{2h\pi} \int (d\alpha)_s + \frac{2G}{2h\pi} \int (d\beta)_s \ ,$$

und in analoger Weise:

$$(B.) \qquad f_s' \geqq \vartheta_s f_s + \frac{2K}{2h\pi} \int (d\alpha)_s + \frac{G + K}{2h\pi} \int (d\beta)_s \ .$$

Benutzt man jetzt die Relation (14.):

$$\int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_s = h\pi(1 - \vartheta_s) ,$$

um aus der Formel (*A.*) das $\int (d\beta)_s$ und aus (*B.*) das $\int (d\alpha)_s$ zu eliminiren, so ergiebt sich:

$$f_s' \leqq \vartheta_s f_s + G(1 - \vartheta_s) + \frac{K - G}{2h\pi} \int (d\alpha)_s ,$$

$$f_s' \geqq \vartheta_s f_s + K(1 - \vartheta_s) + \frac{G - K}{2h\pi} \int (d\beta)_s ,$$

oder was dasselbe ist:

$$(C.) \qquad f_s' \leqq G - (G - K)\left\{\frac{\int (d\alpha)_s}{2h\pi} + \frac{G - f_s}{G - K}\vartheta_s\right\} ,$$

$$(D.) \qquad f_s' \geqq K + (G - K)\left\{\frac{\int (d\beta)_s}{2h\pi} + \frac{f_s - K}{G - K}\vartheta_s\right\} .$$

Markirt man jetzt *auf* σ zwei ganz *beliebige* Punkte p und q, und subtrahirt man sodann die beiden Formeln (*C.*), (*D.*) von einander, nachdem man zuvor den Punkt s in (*C.*) durch p, in (*D.*) aber durch q ersetzt hat, so erhält man:

$$(16.) \quad f_p' - f_q' \leqq (G - K)\underbrace{\left\{1 - \frac{\int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q}{2h\pi} - \frac{G - f_p}{G - K}\vartheta_p - \frac{f_q - K}{G - K}\vartheta_q\right\}}_{z} ,$$

wo z als Abbreviatur dienen soll für den in der geschweiften Klammer enthaltenen Ausdruck.

Die Grössen $(G - K)$, $(G - f_p)$ und $(f_q - K)$ sind, nach der Definition von G und K, stets *positiv*. Und Gleiches gilt [nach (8x.)] auch von den Grössen ϑ_p und ϑ_q. Somit folgt aus (16.) *a fortiori*:

$$(17.) \quad f_p' - f_q' \leqq (G - K)\underbrace{\left\{1 - \frac{\int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q}{2h\pi}\right\}}_{\zeta} ,$$

wo ζ als Abbreviatur dienen soll für den in der geschweiften Klammer enthaltenen Ausdruck*).

*) Man übersieht sofort, dass man in den Formeln (*A.*) und (*B.*) das auf der rechten Seite stehende f_s ohne Weiteres durch G, resp. K ersetzen, und so auf bedeutend *kürzerem* Wege zur Formel (17.) gelangen könnte. Der eingeschlagene *Umweg* hat aber den Vortheil, dass man dabei gleichzeitig auch zur Formel (16.) gelangt, von der späterhin [in § 6a.] Gebrauch zu machen ist.

Ich werde nachweisen, dass dieser Ausdruck ζ stets $\geqq 0$, und dass derselbe, abgesehen von gewissen singulären Fällen, stets < 1 ist.

Ersteres ergiebt sich mit grösster Leichtigkeit. Zufolge (15.) ist nämlich

$$\int (d\alpha)_p \leqq h\pi(1 - \vartheta_p) ,$$

$$\int (d\beta)_q \leqq h\pi(1 - \vartheta_q) .$$

Und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich für jenen Ausdruck

$$\zeta = 1 - \frac{f(d\alpha)_p + f(d\beta)_q}{2h\pi}$$

die Formel:

$$\zeta \geqq 1 - \frac{h\pi(1 - \vartheta_p) + h\pi(1 - \vartheta_q)}{2h\pi} , \quad \text{d. i.:} \quad \zeta \geqq \frac{\vartheta_p + \vartheta_q}{2} .$$

Nach (8x.) sind aber ϑ_p und ϑ_q stets *positiv*. Somit folgt:

(18.) $$\zeta \geqq \frac{\vartheta_p + \vartheta_q}{2} \geqq 0 . \quad — \quad Q.\ e.\ d.$$

Weniger einfach ist der Beweis für die Behauptung: $\zeta < 1$. Nach (17.) ist:

(19.) $$\zeta = 1 - \frac{\xi}{2h\pi} , \quad (h = 1 \text{ resp. } = 2) ,$$

wo alsdann ξ die Bedeutung hat:

(20.) $$\xi = \int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q .$$

Dieses ξ ist offenbar [weil die $(d\alpha)_p$, $(d\beta)_q$ durchweg *positiv* sind, vergl. (8x.)] eine Summe von lauter *positiven* Grössen, also stets der Formel entsprechend:

(21.) $$\xi \geqq 0 .$$

Von besonderer Wichtigkeit ist nun für uns die Frage, ob der Ausdruck ξ seine untere Grenze, die 0, wirklich *erreichen* kann.

Der Ausdruck ξ ist [wie schon betont] eine Summe von lauter *positiven* Gliedern, zu seinem Nullwerden also erforderlich, dass sämmtliche Glieder *einzeln* $= 0$ sind. Nun kann aber ein Glied von der Form $(d\alpha)_p$ [zufolge seiner geometrischen Bedeutung, vgl. pag. 28] offenbar nur dann $= 0$ werden, wenn die in $d\alpha$ an die gegebene Curve oder Fläche σ gelegte Tangente resp. Tangentialebene durch p geht. Analoges gilt für die Glieder $(d\beta)_q$. *Soll also jener Ausdruck ξ verschwinden, so müssen sämmtliche Tangenten resp.*

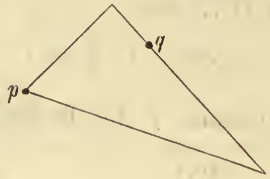
Tangentialebenen des Theiles α durch p, und gleichzeitig sämmtliche Tangenten resp. Tangentialebenen des Theiles β durch q gehen; wobei zu beachten ist, dass die Punkte p und q *auf* σ liegen.

Es muss also, falls etwa die beiden Punkte p und q mit einander coincidiren, die gegebene Curve oder Fläche σ die Gestalt eines von diesem Coincidenzpunkte (p, q) ausgehenden *Winkels*, resp. die Gestalt einer von (p, q) ausgehenden Kegelfläche haben; — was *nicht* möglich ist, weil σ nach unserer Voraussetzung geschlossen sein soll.

Oder es muss, falls die Punkte p und q *nicht* mit einander coincidiren, die Curve oder Fläche σ aus *zwei* von p und q ausgehenden *Winkeln*, resp. aus zwei von p und q ausgehenden *Kegelflächen* zusammengesetzt sein.

Soll also der Ausdruck ξ *verschwinden, so muss* [um einen schon früher (pag. 11) eingeführten *Terminus technicus* zu brauchen] *die gegebene Curve oder Fläche* σ *eine zweisternige sein, und überdies der Punkt* p *im einen, der Punkt* q *im andern Stern gelegen sein*; wie solches angedeutet ist in folgenden beiden Figuren:

(22.)



Die erste derselben repräsentirt ein geradliniges *Viereck* mit den *Sternen* p, q, die zweite ein Dreieck mit den Sternen p, q [vergl. pag. 12]. Man kann aber diese beiden Figuren andererseits auch *räumlich* auffassen. Alsdann werden in der *ersteren* unter den beiden von p und q ausgehenden Winkeln zwei von p und q auslaufende *Kegelflächen* zu verstehen sein. Ferner ist alsdann in der *zweiten* Figur unter dem von p ausgehenden Winkel wiederum eine von p auslaufende *Kegelfläche*, hingegen unter der durch q gehenden Linie eine durch q gehende *Ebene* zu verstehen*).

*) Das hier im *Raum* über die *zweite* Figur Gesagte ist noch nicht erschöpfend. Denn es kann durch diese zweite Figur z. B. auch ein Tetraeder angedeutet sein, und zwar in der [schon auf pag. 12 erwähnten] Auffassung, dass der *eine* Stern in irgend einem Punkte einer Tetraederkante, und der *andere* Stern in einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Kante gedacht wird.

Um die Hauptsache zu wiederholen: *Soll die Grösse ξ verschwinden, so muss die gegebene Curve oder Fläche σ eine zweisternige sein.* Schliesst man also diesen Fall der Zweisternigkeit von der Betrachtung ganz aus, so wird die Grösse ξ ihre untere Grenze, die 0, *niemals* erreichen können, die Formel (21.) also umzuwandeln sein in:

$$\xi > 0 \ . \tag{23.}$$

Hieraus folgt alsdann, mittelst (19.):

$$\zeta < 1 \ . \tag{24.}$$

Vereinigen wir schliesslich dieses Resultat mit dem in (18.) erhaltenen, so gelangen wir zu folgendem Satz:

Zerlegt man eine geschlossene Curve oder Fläche σ in zwei Theile α und β, von denen jeder aus beliebig vielen einzelnen Stücken bestehen kann, und versteht man unter p und q zwei auf σ frei bewegliche Punkte, so wird die Grösse

$$\zeta = 1 - \frac{f(d\alpha)_p + f(d\beta)_q}{2h\pi} \tag{25.}$$

variiren mit der Art und Weise jener Zerlegung, sowie auch mit der Lage der Punkte p, q.

Setzt man aber voraus, die Curve oder Fläche σ sei überall convex und keine zweisternige, so wird ζ dem Spielraum unterworfen sein:

$$0 \leqq \zeta < 1 \ . \tag{26.}$$

Da nun ζ bei stetiger Abänderung der vorhin genannten Zerlegung und bei stetiger Bewegung der Punkte p, q in stetiger Weise variirt, so muss [nach den *Weierstrass*'schen*) Principien] *unter allen Werthen, die ζ überhaupt anzunehmen im Stande ist, ein bestimmter Maximalwerth existiren. Dieser Maximalwerth aber wird sich, ebenso wie jeder andere Specialwerth von ζ, der Formel* (21.) *subordiniren. Bezeichnet man also diesen Maximalwerth der Grösse ζ mit λ, so erhält man:*

$$0 \leqq \zeta \leqq \lambda < 1 \ . \tag{27.}$$

---

*) Es könnte wohl sein, dass hier [beim Uebergange von (26.) zu (27.)] die Tragweite der *Weierstrass*'schen Principien *überschritten* ist. Ich betrachte daher den hier für den Satz (27.) gegebenen Beweis nur als einen *provisorischen*, und werde denselben im folgenden § durch einen anderen und zwar *absolut strengen* Beweis ersetzen.

Das so definirte λ repräsentirt eine der gegebenen Curve oder Fläche σ eigenthümliche Constante, welche die Configurationsconstante derselben heissen mag.

Wir kehren jetzt zurück zur Formel (17.):

$$f_p' - f_q' \leqq (G - K)\,\zeta \,, \tag{28.}$$

und bemerken, dass wir derselben, auf Grund des soeben bewiesenen Satzes (27.), auch folgende Gestalt geben können:

$$f_p' - f_q' \leqq (G - K)\,\lambda \,. \tag{29.}$$

Diese Formel wird, weil bei ihrer Ableitung über die Lage der Punkte p, q auf σ keinerlei Voraussetzung gemacht ist, Gültigkeit haben für zwei auf σ in *beliebiger Bewegung* begriffene Punkte p, q, und also z. B. in Kraft bleiben, wenn man die Punkte p und q an diejenigen Stellen von σ rücken lässt, in denen die Function f' ihre extremen Werthe G' und K' besitzt. Somit folgt:

$$G' - K' \leqq (G - K)\,\lambda \,. \tag{30.}$$

Da nun die Beziehung zwischen f, f' genau dieselbe ist wie zwischen f', f'', u. s. f., so ergeben sich, parallel der Formel (30.), folgende weitere Formeln:

$$G'' - K'' \leqq (G' - K')\,\lambda \,, \tag{30 a.}$$

$$G''' - K''' \leqq (G'' - K'')\,\lambda \,, \tag{30 b.}$$

etc. etc. etc.

Aus diesen Relationen (30.), (30 a.), (30 b.), etc. entspringt sofort folgendes Formelsystem:

$$\begin{aligned} G' - K' &\leqq (G - K)\,\lambda \,, \\ G'' - K'' &\leqq (G - K)\,\lambda^2 \,, \\ G''' - K''' &\leqq (G - K)\,\lambda^3 \,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G^{(n)} - K^{(n)} &\leqq (G - K)\,\lambda^n \,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{31.}$$

Nehmen wir zu diesen Formeln (31.) noch die früheren Formeln (11.) hinzu:

$$\begin{aligned} K \leqq K' \leqq K'' \leqq K''' \leqq \ldots \,, \\ G \geqq G' \geqq G'' \geqq G''' \geqq \ldots \,, \end{aligned} \tag{32.}$$

so haben wir jetzt die Mittel in Händen zur Erreichung unseres eigentlichen Zieles.

Ist nämlich $\varphi(n)$ eine *monoton wachsende*, ferner $\Phi(n)$ eine *monoton abnehmende* Function, und ist überdies bekannt, dass die Differenz

$$\Phi(n) - \varphi(n)$$

einen stets *positiven* und für $n = \infty$ gegen *Null* convergirenden Werth hat; so folgt hieraus, dass beide Functionen $\varphi(n)$ und $\Phi(n)$ für $n = \infty$ gegen *ein und dieselbe endliche Constante* convergiren.

Die hier den Functionen $\varphi(n)$ und $\Phi(n)$ auferlegten Bedingungen sind aber erfüllt, wenn man für dieselben respective $K^{(n)}$ und $G^{(n)}$ nimmt. Denn nach (32.) ist $K^{(n)}$ *monoton wachsend*, ebenso $G^{(n)}$ *monoton abnehmend*. Ferner ist die Differenz

$$G^{(n)} - K^{(n)} ,$$

ihrer Natur nach, stets *positiv*. Und ausserdem convergirt diese Differenz für $n = \infty$ gegen *Null*; wie sich solches sofort aus (31.) ergiebt, falls man nur beachtet, dass die *Configurationsconstante* λ [vergl. den Satz (27.)] *positiv* und < 1 ist. Man erhält also:

$$\lim_{n=\infty} K^{(n)} = \lim_{n=\infty} G^{(n)} = C , \tag{33.}$$

wo C eine *bestimmte endliche Constante* vorstellt. *Hieraus endlich folgt* [vergl. pag. 3], *dass die Function* $f^{(n)}$ *für* $n = \infty$ *in eine Constante, und zwar in die Constante* C *sich verwandelt*; *was angedeutet werden kann durch die Formel:*

$$\lim_{n=\infty} f^{(n)} = C . \tag{34.}$$

Hiermit haben wir das eigentliche Ziel des gegenwärtigen § erreicht. Es bleibt noch übrig, einige Bemerkungen hinzuzufügen, die weiterhin von Nutzen sein werden.

Erste Bemerkung. — Nach der Definition der $K^{(n)}$, $G^{(n)}$ ist stets:

$$\begin{aligned} K^{(p)} &\leqq f^{(p)} \leqq G^{(p)} , \\ K^{(p+q)} &\leqq f^{(p+q)} \leqq G^{(p+q)} , \end{aligned} \tag{35.}$$

wo p und q irgend zwei *positive* ganze Zahlen vorstellen sollen. Solches aber vorausgesetzt, ist nach (32.)

$$K^{(p)} \leqq K^{(p+q)} \text{ und } G^{(p+q)} \leqq G^{(p)} ;$$

so dass man also aus (35.) erhält:

$$\begin{aligned} K^{(p)} &\leqq f^{(p)} \leqq G^{(p)} , \\ K^{(p)} &\leqq f^{(p+q)} \leqq G^{(p)} . \end{aligned} \tag{36.}$$

Demgemäss liegen also die Werthe $f^{(p)}$ und $f^{(p+q)}$ beide zwischen *denselben* Grenzen $K^{(p)}$, $G^{(p)}$; und es ist daher:

$$\text{abs}\,(f^{(p+q)} - f^{(p)}) \leqq G^{(p)} - K^{(p)} ,$$

also mit Rücksicht auf (34.):

$$\text{(37.)} \qquad \text{abs}\,(f^{(p+q)} - f^{(p)}) \leqq (G - K)\,\lambda^p .$$

Lässt man in dieser letzten Formel die Zahl q ins Unendliche wachsen, so folgt mit Rücksicht auf (34.):

$$\text{(38.)} \qquad \text{abs}\,(C - f^{(p)}) \leqq (G - K)\,\lambda^p .$$

In gleicher Weise, nämlich ebenfalls durch ein Anwachsen von q ins Unendliche, ergiebt sich aus der *zweiten* Formel (36.):

$$\text{(39.)} \qquad K^{(p)} \leqq C \leqq G^{(p)} .$$

Bei all' diesen Formeln (35.), (36.), (37.), (38.), (39.) *ist festzuhalten, dass* p *und* q *beliebige Zahlen aus der Reihe* 0, 1, 2, 3, 4, ... *vorstellen.*

Zweite Bemerkung. — Setzt man *nur* voraus, dass die gegebene geschlossene Curve oder Fläche σ *überall convex* ist, *ohne* dabei z. B. den Fall der Zweisternigkeit auszuschliessen, so sind die in der Formel (3.):

$$f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f (d\sigma)_s$$

enthaltenen Grössen ϑ_s und $(d\sigma)_s$ durchweg *positiv*, und überdies $\vartheta_s \leqq 1$. Somit folgt:

$$\text{(40.)} \qquad \text{abs}\, f_s' \leqq (\text{abs}\, f_s)\,\vartheta_s + \frac{1}{h\pi}\int (\text{abs}\, f)\,(d\sigma)_s .$$

Bezeichnet man also den *absolut grössten* Werth von f [derselbe würde unter Anwendung der in (5.), (6.) eingeführten Grössen entweder $= -K$ oder $= +G$ sein] mit M, so ergiebt sich zuvörderst für jedweden auf σ liegenden Punkt s die Relation:

$$\text{(41.)} \qquad \text{abs}\, f_s \leqq M ,$$

und alsdann aus (40.) die Formel:

$$\text{abs}\, f_s' \leqq M\vartheta_s + \frac{M}{h\pi}\int (d\sigma)_s .$$

Das Integral $\int (d\sigma)_s$ ist aber, nach (8 z.), $= h\pi(1 - \vartheta_s)$; man erhält also:

$$\text{(42.)} \qquad \text{abs}\, f_s' \leqq M .$$

Nun gelten, was das Potential (1.):

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \tag{43.}$$

anbetrifft, die bekannten Relationen:

$$\begin{aligned} W_s &= f_s' - \vartheta_s f_s \,, \\ W_{as} &= f_s' - f_s \,, \\ W_{is} &= f_s' + f_s \,, \end{aligned} \tag{44.}$$

[vergl. (24), (25.) pag. 46].

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (41.), (42.), und falls man von Neuem beachtet, dass ϑ_s positiv und < 1 ist:

$$\begin{aligned} \text{abs } W_s &\leqq 2M \,, \\ \text{abs } W_{as} &\leqq 2M \,, \\ \text{abs } W_{is} &\leqq 2M \,, \end{aligned} \tag{45.}$$

Analoges gilt aber auch für die W_a und W_i. Es repräsentiren nämlich die W_a und W_{as} zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ [Satz pag. 47]. Und nach (45.) gilt für sämmtliche W_{as} die Formel

$$-2M \leqq W_{as} \leqq +2M \,.$$

Zufolge eines bekannten allgemeinen Satzes über die Fundamentalfunctionen [Erster Satz pag. 26] wird daher für die W_a ebendieselbe Formel gelten:

$$-2M \leqq W_a \leqq +2M \,;$$

woraus folgt:

$$\text{abs } W_a \leqq 2M \,. \tag{46.}$$

In ähnlicher Weise wird man offenbar erhalten:

$$\text{abs } W_i \leqq 2M \,. \tag{47.}$$

Diese Formeln (45.), (46.), (47.) führen zu folgendem Satz:

Denkt man sich auf einer überall convexen geschlossenen Curve oder Fläche σ [die übrigens mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf], *irgend eine daselbst stetige Function* f *vorgeschrieben, deren absolut grösster Werth* M *heissen mag, und setzt man:*

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \,, \tag{48.}$$

so werden die W_s, W_a, W_{as}, W_i, W_{is}, *ihrem absoluten Betrage nach, durchweg* $\leqq 2M$ *sein.*

§ 6.

Genauere Untersuchung der im vorhergehenden Paragraph eingeführten variablen Grösse ζ.

In einem beliebigen geradlinigen Viereck $ABCD$ wird die Halbirungslinie des bei A gelegenen Innenwinkels nothwendiger Weise durch das Centrum *des dem Viereck einbeschriebenen Kreises* gehen. Gleiches gilt von den Winkeln B, C, D. Somit gelangt man zu dem Satz, dass bei jedem Viereck die Halbirungslinien der vier Innenwinkel sich in ein und demselben Punkte schneiden.

Dieser Satz ist offenbar *falsch*. Und der von uns gemachte Fehler besteht darin, dass wir mit einem in Wirklichkeit *nicht* existirenden Begriff (nämlich mit dem Begriff des dem Viereck einbeschriebenen Kreises) operirt haben. Es erwächst hieraus die Regel, dass man bei mathematischen Untersuchungen, falls Fehler vermieden werden sollen, keinen Begriff früher gebrauchen darf, als bis seine *Existenz* nachgewiesen ist, — selbst dann nicht, wenn der betreffende Begriff nur eine auxiliare Rolle spielt, und das schliesslich sich ergebende Resultat von demselben frei ist.

So wird man z. B. den *Maximalwerth* einer gegebenen Function in die Reihe der aufeinander folgenden Conclusionen niemals aufnehmen dürfen, falls nicht zuvor seine *Existenz* constatirt ist.

Nun ist im vorhergehenden § bei Aufstellung des Satzes (27.) pag. 55 von dem *Maximalwerthe* der Variablen ζ Gebrauch gemacht worden. Wäre ζ eine *gewöhnliche* Function von n Argumenten, so würde (weil die Stetigkeit von ζ keinem Zweifel unterliegt) die *Existenz* eines solchen Maximalwerthes ohne Weiteres folgen aus einem bekannten *Weierstrass'schen Theorem*. Bei dem ganz *absonderlichen* Charakter der Variablen ζ erscheint aber die Anwendbarkeit des Weierstrass'schen Theorems auf diese Variable ζ einigermassen *bedenklich*, mithin die Existenz eines Maximalwerthes von ζ einigermassen *unsicher*, und hierdurch das Fundament des in Rede stehenden Satzes (27.) pag. 55 einigermassen *erschüttert*.

Demgemäss werde ich diesen Satz (27.) im gegenwärtigen § auf einem *andern* Wege ableiten, und zwar auf einem Wege, der von subtilen Maximums- oder Minimums-Untersuchungen völlig frei, und überhaupt von ganz elementarer Natur ist. Dabei beschränke

ich mich von vornherein auf solche Curven oder Flächen σ, die *überall convex* und *keine zweisternigen* sind.

Es handelt sich um die Variable

$$(1.) \qquad \zeta = 1 - \frac{f(d\alpha)_p + f(d\beta)_q}{2h\pi} , \quad \text{(vgl. pag. 52);}$$

und es mag wie früher gesetzt werden:

$$(2.) \qquad \zeta = 1 - \frac{\xi}{2h\pi} ,$$

wo alsdann ξ die Bedeutung hat:

$$(3.) \qquad \xi = \int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q .$$

Ich beginne in der *Ebene*, und zwar mit dem Falle, dass die Curve σ ein *geradliniges Fünfeck* ist. Alsdann wird also, weil σ überall convex und nicht zweisternig sein soll, vorauszusetzen sein, *dass die Innenwinkel dieses Fünfecks durchweg* $< 180^\circ$, *und dass seine Seiten durchweg* > 0 *sind.* Diese Seiten des Fünfecks seien bezeichnet mit a, b, c, d, e; ferner sei k die *kleinste* derselben, und ϱ irgend eine positive Constante, die $< \frac{k}{2}$ ist. Ueberdies sei der zu a *complementare Theil* der Peripherie des Fünfecks, d. i. die gebrochene Linie $bcde$, mit A bezeichnet. Ebenso sei der zu b complementare Theil jener Peripherie mit B benannt; u. s. w.

Denkt man sich um die beiden Endpunkte von a Kreise beschrieben vom Radius ϱ, und die innerhalb dieser Kreise befindlichen Theile von a und A *ausgelöscht*, so mögen die alsdann noch übrig bleibenden Theile von a und A respective mit a_0 und A_0 bezeichnet sein. Alsdann sind offenbar a_0 und A_0 zwei von einander *völlig getrennte* Gebilde, a_0 *geradlinig*, und A_0 eine *gebrochene Linie mit drei Ecken**). In analoger Weise mögen b_0 und B_0, ferner c_0 und C_0, ferner d_0 und D_0, endlich e_0 und E_0 definirt sein.

Ich werde nun nachweisen, dass der in (3.) angegebene Ausdruck:

$$\xi = \int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q ,$$

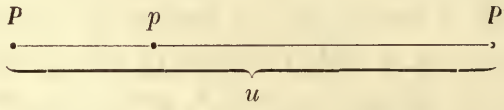
wie man die beiden Theile α und β der Peripherie σ des gegebenen Fünfecks auch immer wählen mag, stets > 0 bleibt, so lange die Punkte p, q in ihrer Bewegung *auf* A_0 *beschränkt* sind. Solches aus-

*) Vergl. die Figur pag. 64.

geführt gedacht, wird alsdann offenbar Gleiches auch gelten, wenn die Bewegung der beiden Punkte p, q auf B_0 beschränkt ist, ebenso, wenn sie auf C_0, oder auf D_0, oder auf E_0 beschränkt ist. *Hiermit wird alsdann aber zugleich dargethan sein*, dass ξ auch dann stets > 0 bleibt, wenn jene Punkte p, q auf der Peripherie σ des Fünfecks in *völlig freier* Bewegung begriffen sind. Denn welche Lage man den Punkten p, q auf dieser Peripherie auch zuertheilen mag, stets werden sie entweder *beide* auf A_0, oder *beide* auf B_0, oder *beide* auf C_0, oder *beide* auf D_0, oder endlich *beide* auf E_0 liegen; — wie sich solches leicht beweisen lässt in folgender Art.

Man denke sich die Punkte p, q auf der Peripherie des Fünfecks *beliebig markirt*, und bezeichne *diejenige* der fünf Seiten a, b, c, d, e, auf welcher p liegt, oder (falls p in einer Ecke des Fünfecks gelegen sein sollte) *eine* von denjenigen beiden Seiten, auf denen p liegt, mit u. Desgleichen bezeichne man *diejenige* Seite, auf welcher q liegt, resp. *eine* von denjenigen beiden Seiten, auf denen q liegt, mit v. Möglicherweise können p und q beide auf *derselben* Seite sich befinden; alsdann würden u und v untereinander identisch sein, — was auf den Gang unserer Betrachtungen keinen Einfluss hat.

Man bezeichne nun die beiden Endpunkte der Seite u mit P, P', und zwar der Art, dass $pP \leqq pP'$ ist. Alsdann wird offenbar,



weil (nach der Definition von ϱ) $PP' > 2\varrho$ ist, die Formel gelten:

$$(\alpha.) \qquad pP' > \varrho \ .$$

Ebenso bezeichne man die beiden Endpunkte von v mit Q, Q', der Art, dass $qQ \leqq qQ'$ ist; so dass also wiederum die Formel stattfindet:

$$(\beta.) \qquad qQ' > \varrho \ .$$

Die beiden Punkte P, Q repräsentiren zwei *Ecken* des gegebenen Fünfecks. Diese beiden Ecken P, Q können zusammengenommen höchstens *vier* Seiten des Fünfecks angehören. Es wird also stets mindestens *eine* Seite existiren, die von P, Q *frei* ist. Diese von P, Q freie Seite mag w heissen. Und sollten *mehrere* solche von P, Q freie Seiten vorhanden sein, so mag unter w irgend eine derselben

(gleichviel welche) verstanden werden. Gleichzeitig mögen die Bezeichnungen w_0, W, W_0 eingeführt werden, genau in derselben Weise, wie z. B. mit Bezug auf a die Bezeichnungen a_0, A, A_0 gebraucht sind; so dass z. B. W eine *gebrochene Linie*, nämlich einen *Complex von vier Seiten* vorstellt. Alsdann gehören die beiden Seiten

$$(\gamma.) \qquad u = PpP' \quad \text{und} \quad v = QqQ'$$

nothwendiger Weise zum Seitencomplex W. Denn gehörte z. B. die Seite $u = PpP'$ *nicht* zu W, so müsste sie identisch sein mit w, und es müsste also w den Punkt P enthalten, während doch w (seiner Definition zufolge) von P *frei* sein soll.

Die beiden *Endpunkte* des Complexes W sind offenbar identisch mit den beiden *Endpunkten* der Seite w. Und dabei ist zu bemerken, dass keiner der beiden Punkte

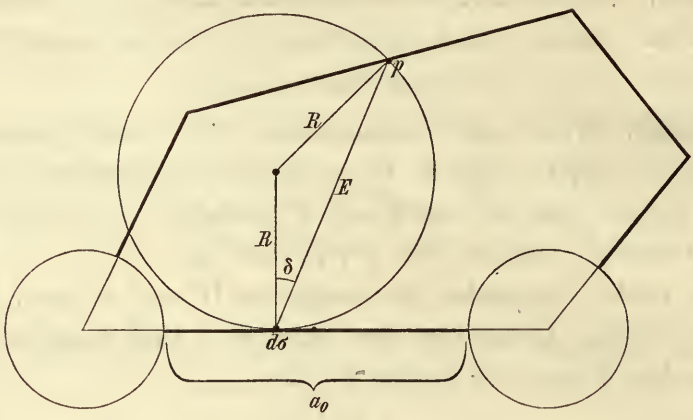
$$(\delta.) \qquad P \text{ und } Q$$

ein Endpunkt von W, oder (was dasselbe) ein Endpunkt von w sein kann. Denn sonst würde w mit P behaftet sein, respective mit Q, während doch w (seiner Definition zufolge) von P und Q *frei* sein soll. Schliesslich sei noch bemerkt, dass die *vier* den Complex W constituirenden Seiten in *innere* und *äussere* eintheilbar sind; wobei alsdann unter den *äusseren* diejenigen beiden zu verstehen sein werden, welche je einem *Endpunkte* von W sich anschliessen.

Wir kommen endlich zum eigentlichen Kern der Sache. Der Punkt p liegt auf u, also, nach $(\gamma.)$, auch auf W. *Nun lässt sich aber nachweisen, dass p nicht nur auf W, sondern auch auf W_0 liegt.* Dies bedarf offenbar für den Fall, dass $u = PpP'$ eine *innere* Seite des Complexes W ist, keiner weiteren Erläuterung. Ist andererseits $u = PpP'$ eine *äussere* Seite des Complexes W, so muss entweder P oder P' ein Endpunkt von W sein; und es muss daher, weil die erstere Möglichkeit durch $(\delta.)$ abgeschnitten wird, nothwendiger Weise *der Punkt P'* ein Endpunkt von W sein. Der Abstand des Punktes p von diesem Endpunkte P' ist aber, nach $(\alpha.)$, $> \varrho$. Folglich liegt p auf W_0.

Der Punkt p befindet sich also unter allen Umständen auf W_0. Und Gleiches wird, mittelst $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$ für q nachweisbar sein. Es liegen also die Punkte p, q *beide* auf W_0, d. h. entweder beide auf A_0, oder beide auf B_0, oder beide auf C_0, oder beide auf D_0, oder endlich beide auf E_0. — *Q. e. d.*

In der nachstehenden Figur sei a die *untere* Seite; so dass also a_0 den ausserhalb der beiden Kreise (ϱ) befindlichen *stark markirten* Theil der Linie a, und A_0 die ausserhalb jener beiden Kreise be-



findliche *stark markirte* gebrochene Linie bezeichnet*). Ist nun $d\sigma$ irgend ein Element der Linie a_0, und p irgend ein Punkt auf A_0, so wird [vgl. (2.) pag. 28]:

$$(4.) \qquad (d\sigma)_p = \frac{d\sigma \,.\, \cos\delta}{E} \,,$$

wo E den Abstand des Punktes p von $d\sigma$, und δ den Winkel von E gegen die auf $d\sigma$ errichtete Normale vorstellt. Construirt man eine die Linie a_0 in $d\sigma$ berührende und durch p gehende Kreisperipherie, so ergiebt sich für den Radius R dieser Peripherie die Gleichung: $2R\cos\delta = E$; wodurch die Formel (4.) übergeht in:

$$(5.) \qquad (d\sigma)_p = \frac{d\sigma}{2R} \,.$$

Welche Lage man nun dem Elemente $d\sigma$ auf a_0 und dem Punkte p auf A_0 zuertheilen mag, niemals kann dabei der Kreisradius R unendlich gross werden; denn der Punkt p kann bei einer Durchlaufung der gebrochenen Linie A_0 niemals auf die Linie a_0 oder auf die Verlängerung derselben fallen**).

---

*) In dieser Figur ist in der That $\varrho < \frac{k}{2}$, entsprechend der auf pag. 61 gemachten Festsetzung.

**) Es ist hierbei die anfangs (pag. 61) gemachte Voraussetzung im Auge zu behalten, dass das gegebene Fünfeck *überall convex* und *kein zweisterniges* sein soll, dass also seine Innenwinkel durchweg $< 180^0$, und seine Seiten durchweg > 0 sind.

Ja noch mehr: Man erkennt, dass der *grösste Werth*, den jener Radius R für alle auf a_0 befindlichen Elemente $d\sigma$ und für alle auf A_0 befindlichen Punkte p annehmen kann, ein *bestimmter endlicher* ist, *der, falls die Seiten und Winkel des Fünfecks in bestimmter Weise gegeben sind, sofort und ohne Mühe berechnet werden könnte.* Bezeichnet man nun diesen bestimmten endlichen Werth mit R_A, so ist R stets $\leqq R_A$; so dass sich also aus (5.) ergiebt:

$$(6\,\mathrm{p.})\quad (d\sigma)_p \geqq \frac{d\sigma}{2R_A}\,, \quad \text{(vorausgesetzt } d\sigma \text{ auf } a_0\text{, und } p \text{ auf } A_0)\,.$$

Nimmt man statt p irgend einen *anderen*, ebenfalls auf A_0 gelegenen Punkt q, so wiederholt sich dieselbe Formel:

$$(6\,\mathrm{q.})\quad (d\sigma)_q \geqq \frac{d\sigma}{2R_A}\,, \quad (d\sigma \text{ auf } a_0\text{, und } q \text{ auf } A_0)\,.$$

Wir zerlegen jetzt die *ganze Peripherie* des Fünfecks [genau wie früher, Satz pag. 55] in beliebiger Weise in zwei Theile α und β, deren jeder aus beliebig vielen einzelnen Stücken bestehen kann, und bezeichnen die auf a_0 fallenden Theile von α und β respective mit α_0 und β_0; so dass also a_0 durch die Gesammtheit von α_0 und β_0 dargestellt ist:

$$(7.)\qquad a_0 = \alpha_0 + \beta_0\,.$$

Alsdann wird offenbar, weil α_0 einen Theil von α, möglicherweise auch das ganze α repräsentirt [und weil überdies die $(d\alpha)_p$ durchweg *positiv* sind; vergl. (8x.) pag. 49], die Relation stattfinden:

$$\int (d\alpha)_p \geqq \int (d\alpha_0)_p\,.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\int (d\beta)_q \geqq \int (d\beta_0)_q\,.$$

Demgemäss folgt aus (3.) pag. 61 sofort:

$$(8.)\qquad \xi \geqq \int (d\alpha_0)_p + \int (d\beta_0)_q\,.$$

Nach (6p.) ist aber jedwedes $(d\alpha_0)_p \geqq \frac{d\alpha_0}{2R_A}$, und nach (6q.) jedwedes $(d\beta_0)_q \geqq \frac{d\beta_0}{2R_A}$. Somit folgt aus (8.):

$$(9.)\qquad \xi \geqq \frac{\int d\alpha_0 + \int d\beta_0}{2R_A} = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2R_A}\,,$$

d. i. mit Rücksicht auf (7.):

$$(10\,\mathrm{a.})\quad \xi \geqq \frac{a_0}{2R_A}\,, \quad \text{(vorausgesetzt } p \text{ und } q \text{ beide auf } A_0)\,.$$

Bei analoger Bezeichnungsweise wird sich nun ferner ergeben:

$$(10\,\text{b.}) \qquad \xi \geqq \frac{b_0}{2R_B}\,, \quad (\text{falls } p \text{ und } q \text{ beide auf } B_0)\,;$$

hier steht alsdann R_B zu b_0, B_0 in derselben Beziehung wie R_A zu a_0, A_0. U. s. w. U. s. w.

Im Ganzen erhält man *fünf* solche Formeln (10 a.), (10 b.), etc., in denen *fünf* Grössen R, nämlich R_A, R_B, R_C, R_D, R_E enthalten sind, die durchweg ebenso wie R_A, *völlig bestimmte endliche* Werthe haben. Bezeichnet man nun den *kleinsten* der fünf Quotienten:

$$(11.) \qquad \frac{a_0}{2R_A}\,,\ \frac{b_0}{2R_B}\,,\ \frac{c_0}{2R_C}\,,\ \frac{d_0}{2R_D}\,,\ \frac{e_0}{2R_E}$$

mit $\varkappa^2$, so folgt aus jenen fünf Formeln sofort:

$$\begin{aligned}
&\xi \geqq \varkappa^2\,, \ (\text{falls } p, q \text{ beide auf } A_0)\,,\\
&\xi \geqq \varkappa^2\,, \ (\text{falls } p, q \text{ beide auf } B_0)\,,\\
&\xi \geqq \varkappa^2\,, \ (\text{falls } p, q \text{ beide auf } C_0)\,,\\
&\xi \geqq \varkappa^2\,, \ (\text{falls } p, q \text{ beide auf } D_0)\,,\\
&\xi \geqq \varkappa^2\,, \ (\text{falls } p, q \text{ beide auf } E_0)\,.
\end{aligned} \qquad (12.)$$

Folglich gilt die Formel $\xi \geqq \varkappa^2$ *ganz allgemein* für zwei auf der Peripherie des Fünfecks in *beliebiger Bewegung* begriffene Punkte p, q. Denn welche Lage dieselben auf dieser Peripherie auch annehmen mögen, stets wird, wie vorhin bewiesen ist, unter den gebrochenen Linien A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 *eine* vorhanden sein, welche gleichzeitig *beide* Punkte enthält. Aus dieser ganz allgemein geltenden Formel

$$(13.) \qquad \xi \geqq \varkappa^2$$

folgt sodann aber mittelst (2.) pag. 61, dass in gleicher Allgemeinheit auch

$$(14.) \qquad \zeta \leqq 1 - \frac{\varkappa^2}{2\pi}$$

ist*). Die Constante $\varkappa^2$ repräsentirt den kleinsten der in (11.) aufgeführten Quotienten, und besitzt also einen jeder Zeit berechenbaren *positiven* und *von Null verschiedenen* Werth. Und demgemäss ist die Differenz

$$1 - \frac{\varkappa^2}{2\pi}$$

nothwendig < 1.

*) Es ist zu beachten, dass die in (2.) enthaltene Zahl h hier im Fall der *Ebene* $= 1$ ist.

Hiermit können wir in Verbindung bringen ein früher [in (18.) pag. 53] auf völlig unanfechtbarem Wege erhaltenes Resultat, demzufolge die Variable ζ stets *positiv* bleibt. Da nun nach (14.) dieses stets *positive* $\zeta \leqq \left(1 - \frac{\varkappa^2}{2\pi}\right)$ ist, so folgt hieraus, dass die Constante

$$1 - \frac{\varkappa^2}{2\pi}$$

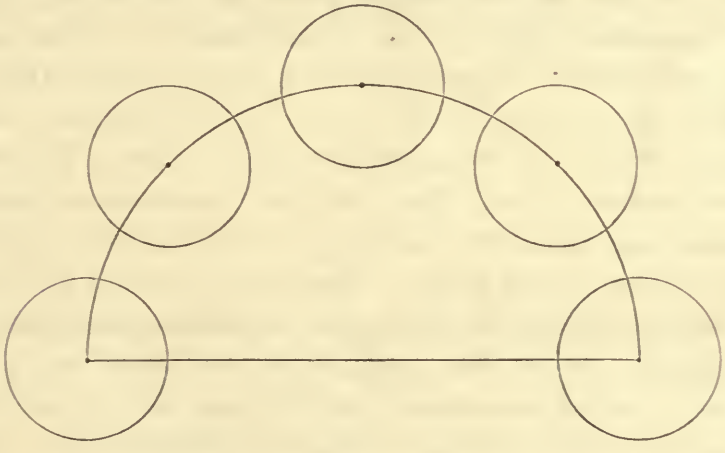
ebenfalls *positiv* ist. Bezeichnet man daher diese Constante mit λ, so gelangt man, auf Grund der Formel (14.), zu folgendem Resultat:

Denkt man sich irgend ein geradliniges Fünfeck gegeben, und setzt man voraus, dass die Peripherie desselben überall convex und keine zweisternige ist, so wird die dieser Peripherie entsprechende Variable ζ, unter allen Umständen, immer nur solche Werthe anzunehmen im Stande sein, die der Formel Genüge leisten:

$$0 \leqq \zeta \leqq \lambda < 1 \,. \tag{15.}$$

Dabei bezeichnet λ eine positive Constante, die wirklich < 1 ist, d. h. eine positive Constante, die um einen angebbaren Betrag < 1 ist. Und zwar würde man diesen Betrag, falls die Seiten und Winkel des Fünfecks in bestimmter Weise gegeben sind, sofort und ohne Mühe zu berechnen im Stande sein.

In genau derselben Weise wie das *Fünfeck* wird man nun z. B. auch den *Halbkreis* behandeln können. Man hat zu diesem Zweck die Peripherie des Halbkreises in *fünf Theile* a, b, c, d, e



zu zerlegen, von denen a den *Durchmesser* repräsentirt, mithin $= 2$ ist, falls man den Radius des gegebenen Halbkreises der Einfachheit willen $= 1$ nimmt. Für die vier anderen Theile b, c, d, e kann

man je ein Viertel der halben Kreislinie nehmen; so dass also jeder der Theile b, c, d, e die Länge $\frac{\pi}{4}$ besitzt. Ueberdies kann man den Radius ϱ der anzuwendenden *kleinen Kreise* (die um die gegenseitigen Grenzpunkte von a, b, c, d, e zu beschreiben sind), beliebig wählen, jedoch der Art, dass *ausserhalb* dieser Kreise noch gewisse Stücke jener Theile b, c, d, e übrig bleiben. — Solches festgesetzt, ist alsdann die anzuwendende Methode Schritt für Schritt dieselbe wie vorhin beim Fünfeck, auch genau von demselben Resultat (15.) begleitet, und genau von derselben *Evidenz*.

Solches erkannt, übersieht man jetzt sofort, dass jener Satz (15.) in ganz analoger Weise constatirbar ist für jede beliebige *überall convexe* und *nicht zweisternige* geschlossene Curve σ. Man wird zu diesem Zweck die Curve σ in irgend welche fünf Theile a, b, c, d, e zu zerlegen, und dabei nur darauf zu achten haben, dass, falls die Curve geradlinige Strecken besitzen sollte, keine dieser geradlinigen Strecken bei jener Zerlegung zerschnitten wird.

In analoger Weise lässt sich nun auch die Untersuchung im Raume bewerkstelligen. Wir betrachten zunächst ein von *sieben ebenen Seitenflächen begrenztes Polyeder*, welches *überall convex* und *nicht zweisternig* sein soll (wie z. B. ein mit zwei ebenen Endflächen versehenes fünfseitiges Prisma), und bezeichnen die sieben Seitenflächen in irgend welcher Reihenfolge mit a, b, c, d, e, f, g. Der zu a *complementare Theil* der Polyederoberfläche, d. i. der Complex $bcdefg$ mag mit A, ebenso der zu b complementare Theil jener Oberfläche mit B bezeichnet sein, u. s. f. Beschreibt man um sämmtliche Punkte der Peripherie der Fläche a kleine Kugelflächen, alle vom Radius ϱ, so liefern all' diese Kugelflächen zusammengenommen eine bestimmte *Enveloppe* (die die Gestalt eines in sich zurücklaufenden Kanales besitzt). Denkt man sich nun die *innerhalb* dieser Enveloppe liegenden Theile der Polyederoberfläche *ausgelöscht*, so mögen die alsdann noch übrig bleibenden Theile von a und A resp. mit a_0 und A_0 bezeichnet sein; so dass also a_0 und A_0 zwei von einander völlig getrennte Gebilde repräsentiren. In analoger Weise mögen b_0, B_0 definirt sein, ferner c_0, C_0, u. s. f.; wobei der für die kleinen Kugeln resp. Enveloppen anzunehmende Radius ϱ stets *ein und derselbe* sein soll.

Diese Constante ϱ braucht übrigens nicht gerade eine superlative Kleinheit zu haben, sondern nur so klein zu sein, dass das Polygon a_0 *ebenso viele* Seiten hat wie a selber, dass ferner das Polygon b_0 *ebenso viele* Seiten hat wie b, u. s. f.

Nachdem ϱ, dieser Restriction entsprechend, in *bestimmter* Weise festgesetzt, mithin a_0, A_0, b_0, B_0, etc. ebenfalls völlig *bestimmt* fixirt sind, wollen wir jetzt in der Ebene der beiden Polygone a, a_0 eine Kreislinie vom Radius ϱ construiren. Diese Kreislinie wird, falls man ihr Centrum *längs der Peripherie des Polygons* a_0 fortwandern lässt, fortdauernd mit der Peripherie von a in *Berührung* bleiben; und zwar der Art, dass in jedem Augenblick entweder *einer* oder *zwei* Berührungspunkte vorhanden sind. Ferner wird diese Kreislinie, wenn man ihr Centrum *innerhalb* a_0 sich bewegen lässt, die Peripherie von a *nirgends* treffen. Endlich wird diese Kreislinie, falls man ihr Centrum *zwischen den beiden Peripherien von* a_0 *und* a sich fortbewegen lässt, die Peripherie von a *schneiden*, jedoch der Art, dass sie in jedem Augenblick von allen Seiten oder Kanten*) des Polygons a immer nur *eine* oder aber *zwei aufeinanderfolgende* schneidet.

Diese Bemerkungen vorausgeschickt, werde ich nun nachweisen, dass die dem gegebenen Polyeder entsprechende Variable

$$\xi = \int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q$$

stets > 0 bleibt, so lange die Punkte p, q auf A_0 beschränkt sind. Gleiches gilt alsdann für eine Beschränkung derselben auf B_0, oder auf C_0, u. s. f. Und Gleiches gilt daher alsdann auch für den Fall, dass die Punkte p, q auf der gegebenen Polyederoberfläche in *völlig freier* Bewegung begriffen sind. Denn welche Lage man den Punkten p, q auf dieser Oberfläche auch zuertheilen mag, stets werden sie entweder *beide* auf A_0, oder *beide* auf B_0, u. s. f. sich befinden, wie sich solches in folgender Art beweisen lässt.

Die Punkte p, q seien auf der Polyederoberfläche *beliebig* markirt; und es sei u diejenige der sieben Polyederflächen a, b, c, d, e, f, g, auf welcher p, und v diejenige, auf welcher q liegt. Man bezeichne nun eine Ecke des Polygons u mit P, die

---

*) Ich bezeichne die Seiten des Polygons a als *Kanten*, weil sie Kanten des gegebenen Polyeders sind.

beiden von P ausgehenden Seiten (oder Kanten) des Polygons mit PP' und PP'', und *alle übrigen* Seiten (oder Kanten) des Polygons zusammengenommen mit $P'P''$. Und zwar richte man diese Bezeichnungen der Art ein, dass der auf u markirte Punkt p von jedweder Seite des Complexes $P'P''$ einen senkrechten Abstand hat, der

$$(\alpha.) \qquad > \varrho$$

ist, — was zufolge der Ueberlegungen auf pag. 69 stets möglich sein wird*).

In analoger Weise mögen auf v der Punkt Q und die Symbole QQ', QQ'', $Q'Q''$ definirt sein; also der Art, dass der auf v gegebene Punkt q von jedweder Seite des Complexes $Q'Q''$ einen senkrechten Abstand hat, der

$$(\beta.) \qquad > \varrho$$

ist.

Die Polyederecken P und Q liegen zusammengenommen (weil die Polyederoberfläche aus *sieben* ebenen Flächen besteht, und keine zweisternige sein soll) höchstens auf *sechs* Polyederflächen. Unter allen Umständen wird also *eine* von P und Q *freie* Polyederfläche angebbar sein. Sie mag w heissen. Und dementsprechend mögen die Bezeichnungen w_0, W, W_0 angewandt werden. Alsdann gehören die beiden Polyederflächen

$$(\gamma.) \qquad u = (p\,P\,P'\,P'') \quad \text{und} \quad v = (q\,Q\,Q'\,Q'')$$

jedenfalls zu W. Denn gehörte z. B. u *nicht* zu W, so müsste u identisch sein mit w; es müsste also w den Punkt P enthalten, während doch w (seiner Definition zufolge) von P *frei* sein soll.

---

*) Denkt man sich nämlich in der Ebene der Polyederfläche u um den gegebenen Punkt p (als Centrum) eine Kreislinie vom Radius ϱ beschrieben, so sind, welche Lage auch p auf u haben mag, stets nur drei Fälle möglich. Entweder die Kreislinie schneidet (resp. berührt) *gar keine* Seite des Polygons u; oder sie schneidet (resp. berührt) nur *eine* Seite des Polygons; oder endlich sie schneidet (resp. berührt) *zwei aufeinanderfolgende* Seiten des Polygons. Stets wird man also die Bezeichnungen PP', PP'', $P'P''$ der Art einrichten können, dass der Complex $P'P''$ nur solche Seiten enthält, die von jener Kreislinie weder geschnitten noch auch berührt werden. Alsdann aber wird p von *jedweder* Seite dieses Complexes $P'P''$ einen senkrechten Abstand haben, der $> \varrho$ ist. — *Q. e. d.*

Die *Peripherie* des Complexes W ist offenbar identisch mit der *Peripherie* von w. Hieraus folgt, dass keiner der beiden Punkte

(δ.) P und Q

auf der Peripherie von W, oder (was dasselbe) auf der Peripherie von w liegen kann. Denn sonst würde w mit P behaftet sein, respective mit Q, während doch w (seiner Definition nach) von P und Q *frei* sein soll. Dabei sei bemerkt, dass die *sechs* den Complex W constituirenden Flächen in *innere* und *äussere* eintheilbar sind, wobei alsdann unter den *äusseren* diejenigen zu verstehen sein werden, welche der *Peripherie* von W sich anschliessen.

Der Punkt p liegt auf u, also nach (γ.) auch auf W. *Nun lässt sich aber zeigen, dass der Punkt p nicht nur auf W, sondern auch auf W_0 liegt.* Dies bedarf für den Fall, dass u eine *innere* Fläche des Complexes W ist, keiner Erläuterung. Ist andererseits u eine *äussere* Fläche des Complexes W, so werden unter den mit PP', PP'', $P'P''$ bezeichneten Seiten des Polygons u *eine* oder *mehrere* vorhanden sein, die auf der Peripherie von W liegen. Hierher aber können die Seiten PP' und PP'' unmöglich gehören, weil sonst P auf dieser Peripherie liegen würde, was nach (δ.) nicht der Fall ist. Auf der Peripherie von W können daher nur solche Seiten des Polygons u gelegen sein, welche dem Complex $P'P''$ zugehören. Von jeder solchen zu $P'P''$ gehörigen Seite hat aber der Punkt p, nach (α.), einen senkrechten Abstand, der $> \varrho$ ist. Folglich wird der Punkt p auch in diesem Falle, dass u eine *äussere* Fläche des Complexes W repräsentirt, nothwendig auf W_0 liegen.

Gleiches lässt sich, mittelst (β.), (γ.), (δ.), für q nachweisen. Folglich liegen die Punkte p und q *beide* auf W_0, d. i. entweder *beide* auf A_0, oder *beide* auf B_0, u. s. f. — *Q. e. d.*

Ist nun $d\sigma$ irgend ein Element der Fläche a_0, und p irgend ein Punkt auf A_0, so wird [vergl. (2.) pag. 28]

(16.) $$(d\sigma)_p = \frac{d\sigma \,.\, \cos\delta}{E^2},$$

wo E den Abstand des Punktes p vom Element $d\sigma$ vorstellt, und δ den Winkel von E gegen die auf $d\sigma$ errichtete Normale bezeichnet. Construirt man eine die Fläche a_0 in $d\sigma$ berührende und durch p

gehende Kugelfläche, und ist R der Radius dieser Kugelfläche, so wird [vergl. etwa die Figur auf pag. 64] die Relation stattfinden: $2R\cos\vartheta = E$. Somit folgt aus (16.):

$$(17.) \qquad (d\sigma)_p = \frac{d\sigma}{2RE},$$

also, weil $E \leqq 2R$ ist:

$$(18.) \qquad (d\sigma)_p \geqq \frac{d\sigma}{4R^2}.$$

Von hier aus kann man nun in genau derselben Weise weiter schliessen, wie früher beim Fünfeck [beim Uebergange von (5.) zu (11.), (12.)], und gelangt so zu dem Resultate, dass

$$(19.) \qquad \xi \text{ stets} \geqq \varkappa^2$$

ist, wo $\varkappa^2$ eine bestimmt angebbare *positive* und *von Null verschiedene* Constante vorstellt.

U. s. w. — *Man findet also schliesslich, dass der für ξ beim Fünfeck aufgestellte Satz* (15.) *in genau derselben Weise auch bei dem hier betrachteten siebenflächigen Polyeder gilt.*

Sodann aber übersieht man sofort, dass man diesen Satz auf demselben Wege überhaupt für jede beliebige *überall convexe* und *nicht zweisternige* geschlossene Fläche beweisen kann. Man wird zu diesem Zweck die gegebene Fläche in *sieben* beliebige Stücke a, b, c, d, e, f, g zu zerlegen, und dabei nur darauf zu achten haben, dass, falls die Fläche etwa *ebene Theile* besitzen sollte, keiner dieser ebenen Theile bei jener Zerlegung zerschnitten wird.

Alles zusammengefasst, gelangen wir also zu folgendem Resultate:

Betrachtet man die früher [(25.) pag. 55] *definirte Variable ζ für irgend eine geschlossene Curve oder Fläche σ, und setzt man dabei voraus, dass diese Curve oder Fläche σ überall convex und keine zweisternige ist, so wird jene Variable ζ stets der Formel entsprechen:*

$$(20.) \qquad 0 \leqq \zeta \leqq \lambda < 1,$$

wo λ eine positive Constante vorstellt, die wirklich < 1 ist. Diese Constante λ mag die Configurationsconstante der gegebenen Curve oder Fläche σ genannt werden.

§ 6a.

An Stelle von ζ wird eine etwas andere Variable z eingeführt, und letztere näher untersucht.

Wir wollen hier eine *überall convexe* geschlossene Curve oder Fläche σ betrachten, und dabei die zugehörige Formel (11a.) pag. 33:

$$(1.) \qquad 0 \leqq \vartheta_s < 1$$

in ihrer *vollen Strenge* verwenden, was die Voraussetzung involvirt, dass jene Curve oder Fläche σ frei ist von *Spitzen* resp. von *Spitzen und Schneiden**).

Ein Blick auf die früheren Formeln

$$f_p' - f_q' \leqq (G - K)z \ , \quad [(16.) \text{ pag. } 52] \ ,$$

und

$$f_p' - f_q' \leqq (G - K)\zeta \ , \quad [(17.) \text{ pag. } 52] \ ,$$

zeigt, dass man, statt der Discussion von ζ, ebenso gut die von z hätte können eintreten lassen, und dass letzteres wohl sogar vortheilhafter gewesen wäre. Denn ζ ist entstanden durch eine gewisse *Vergrösserung* von z, mithin $\geqq z$; und in Folge dieser Beziehung

$$z \leqq \zeta \ ,$$

dürfte für die Beweisbarkeit der Formel $z < 1$ *mehr* Aussicht vorhanden sein, als für die Beweisbarkeit der Formel $\zeta < 1$.

Allerdings liegt bei der Variablen z

$$(2.) \quad z = 1 - \frac{f(d\alpha)_p + f(d\beta)_q}{2h\pi} - \frac{G - f_p}{G - K}\vartheta_p - \frac{f_q - K}{G - K}\vartheta_q$$

[vgl. (16.) pag. 52] der Uebelstand vor, dass sie *nicht*, wie dies bei ζ der Fall war, *nur* von *geometrischen* Verhältnissen abhängt, sondern vielmehr überdies auch noch von den jedesmal vorgeschriebenen *Functionswerthen* f dependirt. Von diesem Uebelstande aber kann man sich leicht dadurch befreien, dass man vier Fälle unterscheidet:

$$(3.) \quad \begin{cases} I.\ Fall: \text{ die Punkte } p,\ q \text{ liegen beide auf } \alpha, \\ II.\ Fall: \ p,\ q \text{ liegen beide auf } \beta, \\ III.\ Fall: \ p \text{ liegt auf } \alpha, \text{ und } q \text{ auf } \beta, \\ IV.\ Fall: \ p \text{ liegt auf } \beta, \text{ und } q \text{ auf } \alpha \ ; \end{cases}$$

---

*) Es ist dieser § 6a. der *einzige*, in welchem wir die Formel (1.) in voller Strenge anwenden. Denn in allen *früheren* §§, und auch in allen *weiter folgenden* §§ wird immer nur die *laxe* Formel

$$0 \leqq \vartheta_s \leqq 1$$

in Anwendung gebracht. Vgl. pag. 33.

und jeden Fall *einzeln* betrachtet. Alsdann nämlich gewähren die für α und β von Anfang an festgesetzten Bestimmungen:

$$(4\,\alpha.) \qquad K \leqq f \leqq \frac{G+K}{2}\,, \quad (\text{auf } \alpha)\,,$$

$$(4\,\beta.) \qquad \frac{G+K}{2} \leqq f \leqq G\,, \quad (\text{auf } \beta)\,,$$

[vgl. (12.) pag. 50] die Mittel und Wege, um die Variable z in jedem solchen *einzelnen* Fall von den f's zu befreien.

So ergeben sich z. B. im *I. Fall*, wo p und q beide *auf* α liegen sollen, aus der Formel $(4\,\alpha.)$ die Relationen

$$\frac{G-f_p}{G-K} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f_q-K}{G-K} \geqq 0\,, \quad (p \text{ und } q \text{ beide auf } \alpha)\,;$$

und hieraus ergeben sich, weil ϑ_p und ϑ_q [vgl. (1.)] stets *positiv* sind, die weiteren Relationen:

$$\frac{G-f_p}{G-K}\,\vartheta_p \geqq \frac{\vartheta_p}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f_q-K}{G-K}\,\vartheta_q \geqq 0\,, \quad (p \text{ und } q \text{ beide auf } \alpha)\,.$$

Betrachtet man also den *I. Fall* für sich *allein*, so folgt aus (2.), und mit Rücksicht auf die beiden letzten Relationen, sofort:

$$z \leqq 1 - \frac{f(d\,\alpha)_p + f(d\,\beta)_p}{2h\pi} - \frac{\vartheta_p}{2}\,, \quad (\text{im I. Fall})\,.$$

Wir wollen das in dieser Formel enthaltene z, weil es speciell dem I. Fall entspricht, mit z_1 benennen, und in ähnlicher Weise die dem II., III. und IV. Fall entsprechenden Werthe von z resp. mit z_2, z_3 und z_4 bezeichnen. Alsdann ergeben sich aus (2.) mit Rücksicht auf die in (3.) gegebene Charakteristik jener vier Fälle, und mit Rücksicht auf $(4\,\alpha,\beta.)$ im Ganzen folgende vier Formeln:

$$(5.) \qquad \begin{aligned} z_1 &\leqq 1 - \frac{f(d\,\alpha)_p + f(d\,\beta)_q}{2h\pi} - \frac{\vartheta_p}{2} &&= Z_1\,,\\ z_2 &\leqq 1 - \frac{f(d\,\alpha)_p + f(d\,\beta)_q}{2h\pi} - \frac{\vartheta_q}{2} &&= Z_2\,,\\ z_3 &\leqq 1 - \frac{f(d\,\alpha)_p + f(d\,\beta)_q}{2h\pi} - \frac{\vartheta_p+\vartheta_q}{2} &&= Z_3\,,\\ z_4 &\leqq 1 - \frac{f(d\,\alpha)_p + f(d\,\beta)_q}{2h\pi} &&= Z_4\,, \end{aligned}$$

wo Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 als Abbreviaturen dienen sollen für die Ausdrücke rechts.

Wir wollen jetzt z_1, z_2, z_3, z_4 *oder vielmehr* Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 *einer genaueren Discussion unterwerfen, indem wir dabei die gegebene Curve*

oder Fläche σ der in (1.) genannten Beschränkung unterwerfen, sonst aber über dieselbe keine weitere Voraussetzung machen.

Der Ausdruck Z_1 (5.) gewinnt, falls man aus ihm das Integral $\int(d\alpha)_p$, mittelst der Relation

$$\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_p = h\pi\,(1 - \vartheta_p)\,,\ \text{[vgl. (14.) pag. 51]}\,,$$

eliminirt, die Gestalt:

$$(6.)\qquad Z_1 = \frac{1+\psi}{2}\,,\ \text{wo}\ \psi = \frac{\int(d\beta)_p - \int(d\beta)_q}{h\pi}\,.$$

Nun sind zwei Möglichkeiten vorhanden, indem β entweder einen *Theil* von σ, oder das *ganze* σ repräsentirt.

Repräsentirt β das *ganze* σ, so ist:

$$\int(d\beta)_p = \int(d\sigma)_p = h\pi\,(1 - \vartheta_p)\,,$$

$$\int(d\beta)_q = \int(d\sigma)_q = h\pi\,(1 - \vartheta_q)\,,\ \text{[vgl. (14.) pag. 51]}\,,$$

also nach (6.)

$$\psi = \vartheta_q - \vartheta_p\,.$$

Hieraus aber folgt, mittelst der aus (1.) entspringenden Relationen

$$0 \leqq \vartheta_p < 1\,,$$

$$0 \leqq \vartheta_q < 1\,,$$

sofort:

$$(G.)\qquad -1 < \psi < +1\,.$$

Repräsentirt andererseits β einen *Theil* von σ, so ergiebt sich:

$$\int(d\beta)_p < \int(d\sigma)_p = h\pi\,(1 - \vartheta_p) \leqq h\pi\,,$$

$$\int(d\beta)_q < \int(d\sigma)_q = h\pi\,(1 - \vartheta_q) \leqq h\pi\,,$$

also, weil die $(d\beta)_p$, $(d\beta)_q$ stets positiv sind:

$$0 \leqq \int(d\beta)_p < h\pi\,,$$

$$0 \leqq \int(d\beta)_q < h\pi\,.$$

Somit erhält man für den in (6.) angegebenen Ausdruck ψ die Formel

$$(H.)\qquad -1 < \psi < +1\,,$$

d. i. dieselbe Formel, wie vorher in (*G.*).

Stets ist also $\psi < 1$, und daher nach (6.) auch

(7.) $$Z_1 \text{ stets} < 1 \ .$$

In genau derselben Weise wird sich offenbar ergeben, dass auch

(8.) $$Z_2 \text{ stets} < 1$$

ist. Ferner ist nach (5.): $Z_3 = Z_2 - \frac{\vartheta_p}{2}$, also, weil $Z_2 < 1$ und ϑ_p positiv ist, auch:

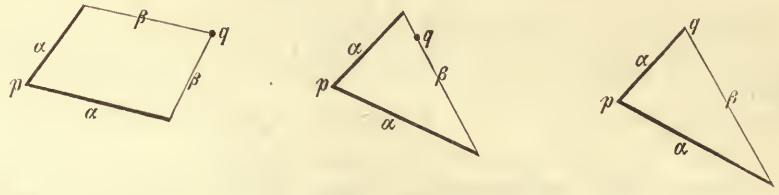
(9.) $$Z_3 \text{ stets} < 1 \ .$$

Es erübrigt also nur noch die Untersuchung des Ausdruckes

(10.) $$Z_1 = 1 - \frac{\xi}{2h\pi} \ , \text{ wo } \xi = \int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q \ .$$

Beschränkt man sich zunächst auf die *Ebene*, d. i. auf eine in der Ebene gegebene *überall convexe* geschlossene Curve σ, so ist zum *Verschwinden* des Ausdruckes ξ [wie schon früher constatirt wurde; vgl. pag. 53, 54] erforderlich, dass alle Tangenten des Theiles α durch p, und alle Tangenten des Theiles β durch q gehen. Es ist also zum Verschwinden von ξ erforderlich, dass die Curve σ ein *geradliniges Viereck* oder *Dreieck* ist, und gleichzeitig erforderlich, dass dabei die Situation der Curventheile α, β und die Lage der Punkte p, q einer der drei folgenden Figuren entspricht:

(11.)



Betrachtet man aber diese Figuren (in denen der Theil α *stark*, der Theil β *schwach* angegeben ist) ein wenig genauer, so bemerkt man, dass der Punkt p in der ersten Figur *nicht* auf β liegt, ebensowenig in der zweiten und dritten Figur, dass mithin all' diese drei Figuren in *Widerspruch* sind mit dem Charakter des hier betrachteten IV. Falles [vgl. (3.)].

Die Grösse ξ kann also in dem hier betrachteten IV. Fall *niemals* verschwinden*). Sie wird daher (weil sie ihrer Natur nach

*) Sie kann aber, ohne mit dem Charakter des IV. Falles in Widerspruch zu gerathen, *unendlich klein* werden; wie solches z. B. der Fall sein wird, wenn man z. B. in der *ersten* Figur (11.) auf der Peripherie des Vierecks zu beiden Seiten von p, und *unendlich nahe* an p zwei Punkte p' und p'' markirt, und die so entstehende unendlich kleine gebrochene Linie $p'\,p\,p''$ nicht zu α, sondern zu β gehören lässt. Alsdann nämlich ist der Charakter des IV. Falles *gewahrt*, und gleichzeitig ξ *unendlich klein*.

positiv ist) in dem hier betrachteten IV. Fall stets > 0 sein. Solches aber erkannt, folgt aus (10.), dass das diesem IV. Fall entsprechende Z_4 stets < 1 ist.

Analoges wird sich offenbar in analoger Weise im *Raume* bei einer *geschlossenen* Fläche herausstellen. Und man gelangt also zu dem Resultate, dass im Raume wie in der Ebene

(12.) $$Z_4 \text{ stets} < 1$$

ist.

Die Resultate (7.), (8.), (9.) und (12.) übertragen sich, mittelst der Relationen (5.), sofort auf z_1, z_2, z_3, z_4. Man erhält in solcher Weise die Formeln:

(13.) $$z_1 < 1 \ , \quad z_2 < 1 \ , \quad z_3 < 1 \ , \quad z_4 < 1 \ ,$$

und gelangt also zu der Erkenntniss, *dass für irgend welche der Voraussetzung* (1.) *entsprechende geschlossene Curve oder Fläche* σ *die Variable* z *stets* < 1 *bleibt, dass sie also z. B. auch dann stets* < 1 *bleibt, wenn jene Curve oder Fläche* σ *eine zweisternige ist.*

Gegen die Richtigkeit dieses Satzes an und für sich ist nichts einzuwenden. Sehr störend aber für die Anwendung des Satzes ist der Umstand, dass die Variable z, im Fall einer *zweisternigen* Curve oder Fläche, dem Werthe 1 sich *asymptotisch* zu nähern im Stande ist; wie solches aus einer näheren Betrachtung der in (11.) angedeuteten Verhältnisse leicht hervorgeht [vgl. die Note pag. 76].

§ 7.

Das äussere und innere Problem. Lösung derselben nach der Methode des arithmetischen Mittels.

Ich habe die hier zu behandelnden Aufgaben — das äussere und innere Problem — bereits früher angegeben [pag. 20 und 27]. Dieselben lauten:

Das äussere Problem. — *Es soll diejenige Fundamentalfunction* Φ *des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *construirt werden, welche an der Grenze von* $\mathfrak{A}$ *(d. i. auf* σ*) vorgeschriebene Werthe* f *besitzt. Oder kürzer ausgedrückt: Es soll die den vorgeschriebenen Grenzwerthen* f *entsprechende Fundamentalfunction* Φ *des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *construirt werden.*

Das innere Problem. — *Es soll die den vorgeschriebenen Grenzwerthen f entsprechende Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{T}$ construirt werden.*

Bei der Behandlung dieser beiden Probleme setze ich voraus, jene auf σ vorgeschriebenen Werthe f seien daselbst überall *stetig*. Die gegebene geschlossene Curve oder Fläche σ soll mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein dürfen. Jedoch setze ich voraus, dass dieselbe *überall convex* und *keine zweisternige* ist. Demgemäss wird derselben eine bestimmte *Configurationsconstante* λ zugehören, d. i. eine Constante, die positiv und < 1 ist [vgl. den Satz pag. 55 u. 72].

Ich werde im gegenwärtigen § *nur* die *Lösungen* der beiden Probleme angeben, und den Beweis für die Richtigkeit derselben erst im nächstfolgenden § mittheilen.

Die Lösungen der beiden Probleme. — Auf Grund der auf σ vorgeschriebenen *stetigen* Werthe f bilde man zuvörderst die Functionen W und f' mittelst der Formeln:

$$(A.) \qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \;, \qquad f_s' = W_s + \vartheta_s f_s \;;$$

hierauf bilde man, auf Grund der Function f', die neuen Functionen W' und f'' mittelst der Formeln:

$$(A'.) \qquad W_x' = \frac{1}{h\pi}\int f'(d\sigma)_x \;, \qquad f_s'' = W_s' + \vartheta_s f_s' \;;$$

sodann bilde man, auf Grund von f'', die Functionen W'' und f''':

$$(A''.) \qquad W_x'' = \frac{1}{h\pi}\int f''(d\sigma)_x \;, \quad f_s''' = W_s'' + \vartheta_s f_s'' \;;$$

u. s. w., u. s. w.

Alsdann sind [vgl. pag. 48] die Functionen f_s', f_s'', f_s''', etc., ebenso wie f_s selber, auf σ *stetig*. Auch finden alsdann [nach Satz pag. 46] die Relationen statt:

$$(B.) \qquad W_{as} = f_s' - f_s \;, \qquad W_{is} = f_s' + f_s \;,$$

$$(B'.) \qquad W_{as}' = f_s'' - f_s' \;, \qquad W_{is}' = f_s'' + f_s' \;,$$

$$(B''.) \qquad W_{as}'' = f_s''' - f_s'' \;, \qquad W_{is}'' = f_s''' + f_s'' \;,$$

u. s. w., u. s. w.

Auch ist bekannt [Satz (34.) pag. 57], dass alsdann die Function $f^{(n)}$, für $n = \infty$, in eine *bestimmte endliche Constante* C sich verwandelt:

$$(P.) \qquad \lim_{n=\infty} f_s^{(n)} = C \ .$$

Setzt man nun, unter Benutzung dieser Constante C:

$$(Q.) \quad \begin{aligned} \xi_s &= (C - f_s) + (C - f_s') + (C - f_s'') + \ldots \text{ in inf.}, \\ \eta_s &= (f_s - f_s') + (f_s'' - f_s''') + (f_s^{(4)} - f_s^{(5)}) + \ldots \text{ in inf.}, \end{aligned}$$

so sind diese Reihen auf σ überall *convergent*, und die durch sie definirten Functionen ξ_s, η_s auf σ überall *stetig*.

Gleichzeitig sind jetzt die Lösungen Φ und Ψ der beiden Probleme ohne Weiteres angebbar. *Einerseits nämlich werden dieselben auf σ identisch sein mit den daselbst vorgeschriebenen f's. Und andererseits werden dieselben für alle ausserhalb σ liegenden Punkte a, resp. für alle innerhalb σ befindlichen Punkte i darstellbar sein durch die Formeln*:

$$(R.) \quad \begin{aligned} \Phi_a &= C + \frac{1}{h\pi} \int \xi (d\sigma)_a \ , \\ \Psi_i &= C + \frac{1}{h\pi} \int \eta (d\sigma)_i \ , \end{aligned}$$

wo C, ξ, η die in (P.), (Q.) angegebene Bedeutung haben.

Es werden also die Lösungen jener beiden Probleme dargestellt sein durch die beiden Werthsysteme:

$$(R'.) \qquad (\Phi_a, f_s) \text{ und } (\Psi_i, f_s) \ .$$

Oder was auf dasselbe hinauskommt: Sie werden dargestellt sein durch die beiden Werthsysteme:

$$(R''.) \qquad (\Phi_a, \Phi_{as}) \text{ und } (\Psi_i, \Psi_{is}) \ ;$$

denn die Φ_{as} sind identisch mit den f_s, und die Ψ_{is} ebenfalls identisch mit den f_s.

Diese in (Q.), (R.), (R'.), (R''.) gemachten Behauptungen sollen im folgenden § bewiesen werden. Zuvor aber mag hier noch auf gewisse Transformationen der Ausdrücke (R.) aufmerksam gemacht werden.

Andere Form der Lösungen. — Aus (R.) ergiebt sich durch Substitution der Werthe (Q.):

$$(\alpha.) \quad \begin{aligned} \Phi_a &= C + \frac{1}{h\pi} \int \Big[(C - f) + (C - f') + (C - f'') + \ldots \Big] (d\sigma)_a \ , \\ \Psi_i &= C + \frac{1}{h\pi} \int \Big[(f - f') + (f'' - f''') + (f^{(4)} - f^{(5)}) + \ldots \Big] (d\sigma)_i \ . \end{aligned}$$

Hier sind die Integrationen sofort ausführbar. Einerseits ist nämlich nach (*A.*), (*A'.*), (*A''.*), etc.:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{h\pi}\int f^{(n)}(d\sigma)_a &= W_a^{(n)}\ , \\ \frac{1}{h\pi}\int f^{(n)}(d\sigma)_i &= W_i^{(n)}\ , \end{aligned}$$

und andererseits ist nach bekanntem Satz [vgl. (8.) pag. 33]:

$$(\gamma.)\qquad \int (d\sigma)_a = 0\ .$$

Man erhält somit:

$$(S.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - W_a - W_a' - W_a'' - W_a''' - \ldots \text{ in inf.}, \\ \Psi_i &= C + (W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \ldots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Dies dürfte die *einfachste* Gestalt sein, in welcher die Lösungen der beiden Probleme im Allgemeinen angebbar sind.

Dritte (aber hypothetische) Form der Lösungen. — Man kann offenbar die Formeln (*α.*) mit Rücksicht auf (*γ.*) auch so schreiben:

$$(\delta.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C + \frac{1}{h\pi}\int\Big[-f - f' - f'' - f''' - \ldots\Big](d\sigma)_a\ , \\ \Psi_i &= C + \frac{1}{h\pi}\int\Big[(f - f') + (f'' - f''') + \ldots\Big](d\sigma)_i\ . \end{aligned}$$

Nun ist aber nach (*B.*), (*B'.*) etc.:

$$\begin{aligned} &f + f' = +W_{is}\ ,\ f'' + f''' = +W_{is}''\ ,\ f^{(4)} + f^{(5)} = +W_{is}^{(4)}\ ,\ \text{etc. etc.}, \\ &f - f' = -W_{as}\ ,\ f'' - f''' = -W_{as}''\ ,\ f^{(4)} - f^{(5)} = -W_{as}^{(4)}\ ,\ \text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

und überdies ist [vgl. (2.) pag. 28]:

$$\begin{aligned} (d\sigma)_a &= \frac{dT^a}{d\nu}\,d\sigma\ , \\ (d\sigma)_i &= \frac{dT^i}{d\nu}\,d\sigma\ . \end{aligned}$$

Somit folgt aus (*δ.*):

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - \frac{1}{h\pi}\int\Big(W_{is} + W_{is}'' + W_{is}^{(4)} + \ldots\Big)\frac{dT^a}{d\nu}\,d\sigma\ , \\ \Psi_i &= C - \frac{1}{h\pi}\int\Big(W_{as} + W_{as}'' + W_{as}^{(4)} + \ldots\Big)\frac{dT^i}{d\nu}\,d\sigma\ , \end{aligned}$$

Hier repräsentirt ν die auf $d\sigma$ errichtete *innere* Normale. Ferner ist $T^a = \log\frac{1}{E^a}$, resp. $= \frac{1}{E^a}$, falls man nämlich unter E^a den Abstand des Punktes a vom Elemente $d\sigma$ versteht. Und analoge Bedeutung hat T^i mit Bezug auf den Punkt i.

Construirt man jetzt zwei auxiliare geschlossene Curven oder Flächen: σ' und σ'', beide *sehr wenig von* σ *verschieden*, und der Art gelegen, dass σ' von σ, und σ von σ'' *umschlossen* wird, so ist offenbar das *innerhalb* σ' liegende Gebiet $\mathfrak{J}'$ ein *Theil* von $\mathfrak{J}$, und ebenso das *ausserhalb* σ'' befindliche Gebiet $\mathfrak{A}''$ ein *Theil* von $\mathfrak{A}$. Durch Anwendung der bekannten Green'schen Sätze auf diese Gebiete $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}''$ ergeben sich alsdann die Formeln:

$$(\zeta.)\qquad \begin{aligned} \int\left(W\frac{dT^a}{d\nu'} - T^a\frac{dW}{d\nu'}\right)d\sigma' &= 0\ , \\ \int\left(W\frac{dT^i}{d\nu''} - T^i\frac{dW}{d\nu''}\right)d\sigma'' &= 0\ , \end{aligned}$$

wo ν' und ν'' die *inneren* Normalen von σ' und σ'' vorstellen. Es sind nämlich (bei festgehaltenem a) W_x und T_x^a Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$. Demgemäss sind auf diese Functionen die Green'schen Sätze anwendbar, wenn auch nicht mit Bezug auf $\mathfrak{J}$ selber, so doch mit Bezug auf jedes *kleinere* Gebiet, welches, wie z. B. $\mathfrak{J}'$, mit all' seinen Punkten *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt. Bringt man nun aber jene Sätze auf W_x, T_x^a und das Gebiet $\mathfrak{J}'$ in Anwendung, so erhält man die *erste* der beiden Formeln ($\zeta.$). Und in analoger Weise ergiebt sich die *zweite* dieser Formeln durch Anwendung der genannten Sätze auf W_x, T_x^i und das Gebiet $\mathfrak{A}''$.

Nun lässt sich zeigen, dass diese Formeln ($\zeta.$) *im Allgemeinen* [d. h. unter gewissen Voraussetzungen, auf die ich hier nicht näher eingehen will; vgl. meinen Aufsatz in den Math. Annalen, Bd. 16, pag. 409—438] auch dann noch in Kraft bleiben, wenn man σ' mit σ, und ebenso auch σ'' mit σ identificirt; so dass man also erhält:

$$(\eta.)\qquad \begin{aligned} \int\left(W_{is}\frac{dT^a}{d\nu} - T^a\frac{dW_{is}}{d\nu}\right)d\sigma &= 0\ , \\ \int\left(W_{as}\frac{dT^i}{d\nu} - T^i\frac{dW_{as}}{d\nu}\right)d\sigma &= 0\ . \end{aligned}$$

Diese Formeln ($\eta.$) können hingeschrieben werden, nicht nur für W, sondern ebenso auch für W', W'', W''', etc. Und mit Rücksicht auf all' diese Formeln gewinnen alsdann die Ausdrücke ($\varepsilon.$) folgende Gestalt:

$$(\vartheta.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - \frac{1}{h\pi}\int\left\{\frac{d(W_{is} + W_{is}'' + W_{is}^{(4)} + \ldots)}{d\nu}\right\}T^a\,d\sigma\ , \\ \Psi_i &= C - \frac{1}{h\pi}\int\left\{\frac{d(W_{as} + W_{as}'' + W_{as}^{(4)} + \ldots)}{d\nu}\right\}T^i\,d\sigma\ , \end{aligned}$$

Nun lässt sich zeigen, dass *im Allgemeinen* [d. h. unter gewissen Voraussetzungen, auf die ich hier nicht näher eingehen mag; vgl. in den Math. Annal. Bd. 16 die Formeln (*D.*) pag. 414 und die Formeln (*D.*) pag. 436] die Gleichung stattfindet

$$\frac{dW_{is}^{(n)}}{d\nu} = \frac{dW_{as}^{(n)}}{d\nu} ,$$

und dass also die in ($\vartheta.$) in den geschweiften Klammern enthaltenen Ausdrücke beide *ein und denselben* Werth haben. Demgemäss gewinnen also jene Formeln ($\vartheta.$) folgende Gestalt:

$$(T.) \qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - \frac{1}{h\pi}\int \varrho\, T^a\, d\sigma , \\ \Psi_i &= C - \frac{1}{h\pi}\int \varrho\, T^i\, d\sigma , \end{aligned}$$

wo ϱ die Bedeutung hat:

$$\varrho = \frac{d(W_{is} + W_{is}'' + W_{is}^{(4)} + \ldots)}{d\nu} = \frac{d(W_{as} + W_{as}'' + W_{as}^{(4)} + \ldots)}{d\nu} .$$

Durch diese Formeln (*T.*) werden die Lösungen Φ_a und Ψ_i der beiden Probleme, abgesehen von der Constante C, dargestellt *als Potentiale ein und derselben Curven- oder Flächenbelegung.* Die Dichtigkeit dieser Belegung ist $= -\frac{\varrho}{h\pi}$.

Bemerkung. — Es sei innerhalb $\mathfrak{F}$ irgend ein Punkt i markirt, und um i (als Centrum) eine Kreislinie oder Kugelfläche $\varkappa$ vom Radius 1 beschrieben. Denkt man sich nun die auf der gegebenen geschlossenen Curve oder Fläche σ vorgeschriebenen Werthe f, längs der von i ausgehenden Strahlen, und ohne Aenderung ihrer Grössen, von σ nach $\varkappa$ versetzt, so wird das *arithmetische Mittel* aller dieser jetzt auf $\varkappa$ vorhandenen Werthe f dargestellt sein durch:

$$\frac{1}{2h\pi}\int f\, d\varkappa .$$

Versteht man aber unter $d\sigma$ das mit $d\varkappa$ correspondirende Element der gegebenen Curve oder Fläche σ, so ist offenbar $d\varkappa$ nichts Anderes als das $(d\sigma)_i$. Jenes arithmetische Mittel ist daher auch so darstellbar:

$$\frac{1}{2h\pi}\int f(d\sigma)_i ,$$

also identisch mit $\frac{1}{2} W_i$, [vgl. (*A.*)].

Demgemäss kann man dieses $\frac{1}{2}W_i$ *das arithmetische Mittel aller auf* σ *ausgebreiteten Werthe* f *in Bezug auf den Punkt* i nennen. Und mit Rücksicht hierauf habe ich die hier exponirte Methode, in welcher die aufeinanderfolgenden arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}W_i$, $\frac{1}{2}W_i'$, $\frac{1}{2}W_i''$, etc. eine wichtige Rolle spielen, die *Methode des arithmetischen Mittels* genannt.

§ 8.

Beweis für die Richtigkeit der angegebenen Lösungen. Das schliesslich sich ergebende Existenztheorem.

Zu beweisen ist zuvörderst die Convergenz der Reihen $(Q.)$:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} \xi &= (C-f)+(C-f')+(C-f'')+\ldots \text{ in inf.},\\ \eta &= (f-f')+(f''-f''')+(f^{(4)}-f^{(5)})+\ldots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Setzt man

$$(2.)\qquad \begin{aligned} \xi &= \xi^{(n)}+\varrho^{(n)}\ ,\\ \eta &= \eta^{(n)}+\varsigma^{(n)}\ , \end{aligned}$$

indem man dabei den *Restgliedern* $\varrho^{(n)}$, $\varsigma^{(n)}$ die Bedeutungen zuertheilt:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} \varrho^{(n)} &= (C-f^{(n)})+(C-f^{(n+1)})+\ldots \text{ in inf.},\\ \varsigma^{(n)} &= (f^{(2n)}-f^{(2n+1)})+(f^{(2n+2)}-f^{(2n+3)})+\ldots \text{ in inf.}, \end{aligned}$$

so folgt aus (37.), (38.) pag. 58 sofort:

$$(\alpha.)\qquad \operatorname{abs}\varrho^{(n)} \leqq (G-K)(\lambda^n+\lambda^{n+1}+\lambda^{n+2}+\ldots \text{ in inf.})\ ,$$

$$(\beta.)\qquad \operatorname{abs}\varsigma^{(n)} \leqq (G-K)(\lambda^{2n}+\lambda^{2n+2}+\lambda^{2n+4}+\ldots \text{ in inf.})\ ;$$

also, weil λ ein *positiver ächter Bruch* ist, *a fortiori*:

$$(\gamma.)\qquad \operatorname{abs}\varsigma^{(n)} \leqq (G-K)(\lambda^n+\lambda^{n+1}+\lambda^{n+2}+\ldots \text{ in inf.})\ .$$

Und nunmehr folgt aus $(\alpha.)$ und $(\gamma.)$:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} \operatorname{abs}\varrho^{(n)} &\leqq (G-K)\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\ ,\\ \operatorname{abs}\varsigma^{(n)} &\leqq (G-K)\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\ , \end{aligned}$$

wo der Ausdruck rechts in beiden Formeln *derselbe* ist. Denkt man sich nun diesen Ausdruck (was offenbar stets möglich ist) durch Vergrösserung von n unter einen beliebigen Kleinheitsgrad ε hinab-

gedrückt, so sind die Restglieder $\varrho^{(n)}$, $\varsigma^{(n)}$, ihrem absoluten Betrage nach, in *sämmtlichen* Punkten der Curve oder Fläche σ kleiner als jenes ε. Hieraus aber folgt, dass die Reihen nicht nur *convergent* sind, sondern auch, dass die durch sie dargestellten Functionen ξ, η auf σ *stetig* sind.

Erläuterung. — Hat man nämlich n so weit vergrössert, dass abs $\varrho^{(n)}$ für sämmtliche Punkte der Curve oder Fläche σ kleiner als ε ist, so finden für je zwei solche Punkte s und s_1 die Formeln statt:

$$(a.) \qquad \text{abs } \varrho_s^{(n)} < \varepsilon \ ,$$

$$(b.) \qquad \text{abs } \varrho_{s_1}^{(n)} < \varepsilon \ .$$

Andererseits kann kein Zweifel darüber bestehen, dass der *geschlossene* Ausdruck

$$\xi^{(n)} = (C - f) + (C - f') + \ldots + (C - f^{(n-1)})$$

eine Function repräsentirt, welche [ebenso wie f, f', f'', ...; vgl. pag. 78] auf σ überall *stetig* ist; und man kann daher durch gegenseitige Annäherung der (bis jetzt beliebig gelassenen) Punkte s und s_1 dafür sorgen, dass

$$(c.) \qquad \text{abs } (\xi_s^{(n)} - \xi_{s_1}^{(n)}) \text{ ebenfalls } < \varepsilon$$

wird.

Solches aber ausgeführt gedacht, folgt jetzt aus (*a.*), (*b.*), (*c.*) sofort:

$$\text{abs } [(\xi_s^{(n)} + \varrho_s^{(n)}) - (\xi_{s_1}^{(n)} + \varrho_{s_1}^{(n)})] < 3\varepsilon \ ,$$

oder, was dasselbe ist [vgl. (2.)]:

$$\text{abs } (\xi_s - \xi_{s_1}) < 3\varepsilon \ .$$

D. h. ξ ist im Punkte s *stetig*; s war aber ein *beliebiger* Punkt der Curve oder Fläche σ. U. s. w.

In analoger Weise ergiebt sich der Beweis mit Bezug auf die Function η.

Da nun die Functionen ξ, η auf σ überall *stetig* sind, so subordiniren sich die in (*R.*) pag. 79 angegebenen Ausdrücke

$$(5.) \qquad \begin{aligned} \Phi_x &= C + \frac{1}{h\pi}\int \xi (d\sigma)_x \ , \\ \Psi_x &= C + \frac{1}{h\pi}\int \eta (d\sigma)_x \end{aligned}$$

ohne Weiteres dem allgemeinen Theorem pag. 47. Demzufolge ist jedes der beiden Werthsysteme

$$(\Phi_a, \ \Phi_{as}) \text{ und } (\Psi_a, \ \Psi_{as})$$

eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, und andererseits jedes der beiden Systeme

$$(\Phi_i,\ \Phi_{is}) \text{ und } (\Psi_i,\ \Psi_{is})$$

eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{F}$.

Soll also nachgewiesen werden, dass die Systeme $(\Phi_a,\ \Phi_{as})$ *und* $(\Psi_i,\ \Psi_{is})$ *wirklich die Lösungen unserer beiden Probleme sind, so wird nur noch zu zeigen sein, dass die* Φ_{as} *identisch mit den* f_s, *und die* Ψ_{is} *ebenfalls identisch mit den* f_s *sind.*

Zu diesem Zwecke substituiren wir in (5.) für ξ die Zerlegung (2.), und erhalten so, indem wir gleichzeitig für x einen Punkt a eintreten lassen, die Formel:

$$\Phi_a = C + \frac{1}{h\pi}\int_{\mathfrak{F}} (\xi^{(n)} + \varrho^{(n)})\,(d\sigma)_a \ ,$$

d. i. die Formel:

$$\Phi_a = \Phi_a^{(n)} + \mathsf{P}_a^{(n)} \ , \tag{6.}$$

wo alsdann $\Phi_a^{(n)}$ und $\mathsf{P}_a^{(n)}$ die Bedeutungen haben:

$$\Phi_a^{(n)} = C + \frac{1}{h\pi}\int \xi^{(n)}\,(d\sigma)_a \ , \tag{7.}$$

$$\mathsf{P}_a^{(n)} = \frac{1}{h\pi}\int \varrho^{(n)}\,(d\sigma)_a \ . \tag{8.}$$

Dabei mag die Zahl n vorläufig ganz *ad libitum* gewählt sein.

Aus (7.) ergiebt sich durch Substitution des Werthes von $\xi^{(n)}$ [vgl. (1.), (2.), (3.)]:

$$\Phi_a^{(n)} = C + \frac{1}{h\pi}\int \Big[(C-f) + (C-f') \ldots + (C-f^{(n-1)})\Big]\,(d\sigma)_a \ ;$$

hier aber ist die Integration sofort ausführbar mittelst gewisser schon im vorhergehenden § [auf pag. 80] notirter Formeln:

$$\frac{1}{h\pi}\int f^{(n)}\,(d\sigma)_a = W_a^{(n)} \ ,$$

$$\int (d\sigma)_a = 0 \ .$$

Man erhält in solcher Weise:

$$\Phi_a^{(n)} = C - [W_a + W_a' + W_a'' \ldots + W_a^{(n-1)}] \ . \tag{9.}$$

Nach den Formeln (*B.*), (*B.'*), (*B.''*) etc. pag. 78 ist aber

$$W_{as} = f_s' - f_s \ ,$$
$$W_{as}' = f_s'' - f_s' \ ,$$
$$W_{as}'' = f_s''' - f_s'' \ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$W_{as}^{(n-1)} = f_s^{(n)} - f_s^{(n-1)} \ ;$$

woraus durch Addition folgt:

$$W_{as} + W_{as}' + W_{as}'' \ldots + W_{as}^{(n-1)} = f_s^{(n)} - f_s \ .$$

Demgemäss ergiebt sich aus der Formel (9.) für $\Phi_{as}^{(n)}$ folgender Werth:

$$\Phi_{as}^{(n)} = C - f_s^{(n)} + f_s \ . \qquad (10.)$$

Was nun ferner den Ausdruck (8.) betrifft:

$$\mathsf{P}_a^{(n)} = \frac{1}{h\pi}\int \varrho^{(n)}\,(d\sigma)_a \ ,$$

so subordinirt sich derselbe, weil ξ selber, mithin auch das [dem ξ zugehörige Restglied] $\varrho^{(n)}$ auf σ *stetig* ist, ohne Weiteres dem Satze pag. 59. Diesem Satze zufolge sind z. B. die *absoluten* Werthe der $\mathsf{P}_a^{(n)}$ und $\mathsf{P}_{as}^{(n)}$ durchweg $\leqq 2M$, falls man nämlich unter M den *absolut grössten* Werth von $\varrho^{(n)}$ auf σ versteht. Man erhält also:

$$\operatorname{abs} \mathsf{P}_{as}^{(n)} \leqq 2M \ .$$

Dieses M, der absolut grösste Werth von $\varrho^{(n)}$ auf σ, ist aber nach (4.) nothwendig

$$\leqq (G - K)\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \ .$$

Demgemäss ergiebt sich:

$$\operatorname{abs} \mathsf{P}_{as}^{(n)} \leqq 2(G-K)\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \ ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\mathsf{P}_{as}^{(n)} = 2\Theta(G-K)\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \ , \qquad (11.)$$

wo Θ einen unbekannten positiven oder negativen *ächten Bruch* vorstellt.

Substituirt man jetzt die Werthe (10.), (11.) in die aus (6.) sich ergebende Formel:

$$\Phi_{as} = \Phi_{as}^{(n)} + \mathsf{P}_{as}^{(n)} \ ,$$

so erhält man

$$\Phi_{as} = C + f_s - f_s^{(n)} + 2\Theta(G-K)\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \ . \qquad (12.)$$

Diese Formel ist gültig für *jedwedes* n, weil n zu Anfang *ad libitum* gewählt war. Lässt man aber n ins Unendliche wachsen, und beachtet man, dass die Configurationsconstante λ positiv und < 1 ist, so ergiebt sich

$$\Phi_{as} = C + f_s - \lim_{n=\infty} f_s^{(n)} , \tag{13.}$$

also mit Rücksicht auf (*P.*) pag. 79:

$$\Phi_{as} = f_s . \tag{14.}$$

In analoger Weise lässt sich zeigen, dass auch

$$\Psi_{is} = f_s \tag{15.}$$

ist; was weiter auszuführen überflüssig sein würde. Nachdem aber die beiden Relationen (14.), (15.) constatirt sind, *ist hiermit zugleich die Richtigkeit aller im vorhergehenden § gemachten Behauptungen dargethan.*

Bemerkung. — Man wird vielleicht der Ansicht sein, dass die Relation (14.) auf *kürzerem* Wege ableitbar sei, dass nämlich dieselbe direct aus der Formel (10.) sich ergebe, sobald man daselbst $n = \infty$ macht.

Um genauer hierauf einzugehen, sei zunächst bemerkt, dass die Function Φ ausführlicher zu bezeichnen sein würde mit $\Phi^{(x)}$. Unsere Aufgabe bestand in der Ermittelung derjenigen Werthe, welche diese Function Φ oder $\Phi^{(x)}$ für die Punkte as annimmt; und hierüber haben wir durch die Relation (14.) Auskunft erhalten; denn dieselbe lautet:

$$(\Phi^{(x)})_{as} = f_s . \tag{α.}$$

Aus der Formel (10.) hingegen würde sich für $n = \infty$ ein ganz *anderes* Resultat ergeben haben, nämlich folgendes:

$$(\Phi_{as}^{(n)})_{n=\infty} = f_s . \tag{β.}$$

In solcher Weise geschrieben, dürfte der Unterschied klar zu Tage liegen. — Wir können uns so ausdrücken: Die linken Seiten der Formeln (α.), (β.) beziehen sich beide auf den Ausdruck $\Phi_a^{(n)}$, jedoch mit dem Unterschiede, dass die linke Seite von (α.) denjenigen Werth bezeichnet, welchen dieser Ausdruck annimmt, sobald man darin *zuerst* $n = \infty$ macht, und *sodann* a nach s rücken lässt; während die linke Seite von (β.) denjenigen Werth bezeichnet, welchen der Ausdruck annimmt, sobald man die genannten beiden Operationen in *umgekehrter* Reihenfolge vornimmt.

Nachdem wir nun die Richtigkeit der im vorhergehenden § gegebenen Lösungen der beiden Probleme bewiesen haben, ist damit zugleich auch constatirt, dass diese Probleme stets *lösbar* sind, d. h., dass die durch die beiden Probleme geforderten Functionen Φ, Ψ stets *existiren*; so dass wir also zu folgendem Theorem gelangen.

Existenztheorem. — *Es sei in der Ebene oder im Raume eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, welche mit Ecken, resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein kann, welche aber überall convex und nicht zweisternig sein soll. Und von den beiden Gebieten, in welche die Ebene oder der Raum durch diese Curve oder Fläche σ zerlegt wird, mag das äussere mit $\mathfrak{A}$, das innere mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet sein.*

Denkt man sich nun auf σ irgend welche daselbst stetige Werthe f vorgeschrieben, so wird immer eine Fundamentalfunction Φ des Gebietes $\mathfrak{A}$ existiren, welche auf σ jene vorgeschriebenen Werthe f besitzt; desgleichen wird alsdann stets eine Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren, welche ebenfalls auf σ jene vorgeschriebenen Werthe f besitzt.

Auch sind diese Fundamentalfunctionen Φ und Ψ durch die Anforderung, auf σ mit jenen vorgeschriebenen Werthen f identisch zu sein, vollständig und eindeutig bestimmt [zufolge der Sätze pag. 20 und 26].

§ 9.

Sich anschliessende Betrachtungen.

Wir halten fest an den Vorstellungen, Voraussetzungen und Bezeichnungen der beiden vorhergehenden §§; so dass also z. B. Φ und Ψ die den vorgeschriebenen f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, und diese f auf σ überall *stetig* sein sollen.

Ausser f selber mögen auf der gegebenen Curve oder Fläche σ noch unendlich viele andere Functionen*)

$$(1.) \qquad f^1,\ f^2,\ f^3,\ \ldots\ f^p,\ \ldots \text{ in inf.}$$

ausgebreitet sein, die (ebenso wie f) auf σ überall *stetig* sind. Dabei wollen wir annehmen, dass f^p, bei ins Unendliche wachsendem p, gegen jene eigentlich *vorgeschriebene* Function f *convergirt*. Alsdann wird, sobald auf σ irgend ein Punkt s markirt ist, die diesem Punkte s zugehörige Quantität

$$\text{abs}\,(f_s{}^p - f_s)$$

*) Diese Functionen sollen vollständig *andere* sein, als die in den vorhergehenden § § besprochenen Functionen

$$f',\ f'',\ f''',\ \ldots\ f^{(n)},\ \ldots$$

Zur bessern Unterscheidung habe ich daher die einen durch *obere Indices*, die andern durch *Accente* bezeichnet. So ist ja z. B. auch das eingeklammerte (n) ebenfalls nur eine Andeutung für n aufeinanderfolgende *Accente*.

durch Vergrösserung des Parameters p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein. Oder genauer ausgedrückt: Es wird alsdann, falls irgend ein Kleinheitsgrad ε_0 *ad libitum* gegeben ist, stets eine positive ganze Zahl p_0 von solcher Grösse angebbar sein, dass jene Quantität

$$\text{abs}\,(f_s^p - f_s)$$

$< \varepsilon_0$ ist, nicht nur für $p = p_0$, sondern auch für alle ganzen Zahlen p, die $> p_0$ sind.

Wir wollen jetzt aber die über die Convergenz von f^p gemachte Voraussetzung noch *weiter verschärfen*, nämlich annehmen, dass f^p, bei ins Unendliche wachsendem p, für alle auf σ befindlichen Punkte s *gleichmässig* gegen f convergirt. Alsdann wird, nachdem irgend ein Kleinheitsgrad ε_0 *ad libitum* gewählt ist, stets eine Zahl p_0 angebbar sein von solcher Grösse, dass die Formel

$$\text{(2.)}\quad \text{abs}\,(f_s^p - f_s) < \varepsilon_0\,,\ (p \text{ beliebig, aber} \geqq p_0 \text{ gedacht})\,,$$

simultan stattfindet für *sämmtliche* Punkte s der Curve oder Fläche σ.

Dies vorangeschickt, betrachten wir jetzt die den Functionen

$$f \text{ und } f^1,\ f^2,\ f^3,\ \ldots\ f^p,\ \ldots$$

entsprechenden *Fundamentalfunctionen*

$$\Phi \textit{ und } \Phi^1,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ \ldots\ \Phi^p,\ \ldots$$

des Gebietes $\mathfrak{A}$ *); und legen uns die Frage vor, ob ebenso wie f^p gegen f convergirt, ebenso vielleicht auch Φ^p gegen Φ convergiren wird.

Nach der Definition von Φ und Φ^p ist: $\Phi_{as} = f_s$ und ebenso: $\Phi_{as}^{\,p} = f_s^p$, oder wenn man hier (wo kein Missverständniss möglich ist) s für as schreibt:

$$\Phi_s = f_s \quad \text{und} \quad \Phi_s^p = f_s^p\,.$$

Demgemäss ist jene *simultan* für alle Punkte s geltende Formel (2.) auch so schreibbar:

$$\text{(3.)}\quad \text{abs}\,(\Phi_s^p - \Phi_s) < \varepsilon_0\,,\ (p \text{ beliebig, aber} \geqq p_0 \text{ gedacht})\,.$$

---

*) Diese Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{A}$ würden, falls es beliebt, sofort construirt werden können mittelst der Methode des arithmetischen Mittels (pag. 79). An ihrer *Existenz* ist also kein Zweifel.

Da nun $\Phi^p - \Phi$ (ebenso wie Φ und Φ^p selber) eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ ist, so können wir auf diese Function $\Phi^p - \Phi$ ohne Weiteres den ersten Satz pag. 26 in Anwendung bringen. Alsdann aber gelangen wir auf Grund der Relation (3.) sofort zu der allgemeineren Formel:

$$(4.) \quad \text{abs}\,(\Phi_x{}^p - \Phi_x) < \varepsilon_0\,, \quad (p \text{ beliebig, aber} \geqq p_0)\,,$$

nämlich zu dem Resultat, dass diese letztere Formel *simultan* stattfindet für sämmtliche Punkte x *in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{A}$.

Erläuterung. — Ist nämlich U irgend eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und findet für alle auf der *Grenze* von $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ gelegenen Punkte s die Formel statt:

$$-\varepsilon_0 \leqq U_s < +\varepsilon_0\,,$$

so wird, zufolge des ersten Satzes pag. 26, für alle Punkte x in *ganzer Erstreckung* von $\mathfrak{A}$ die analoge Formel gelten:

$$-\varepsilon_0 < U_x < +\varepsilon_0\,.$$

Oder mit anderen Worten: *Findet für die Punkte s an der Grenze von* $\mathfrak{A}$ *die Formel statt*:

$$(\alpha.) \qquad \text{abs}\, U_s < \varepsilon_0\,,$$

so wird für alle Punkte x in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *die analoge Formel gelten*:

$$(\beta.) \qquad \text{abs}\, U_x < \varepsilon_0\,.$$

Mittelst dieses Satzes ($\alpha.$), ($\beta.$) gelangt man aber sofort von der Formel (3.) zur Formel (4.). — *Q. e. d.*

Erinnern wir uns an die Art und Weise, wie [bei (2.)] ε_0 und p_0 eingeführt worden sind, so werden wir dieses Resultat folgendermassen klar zu stellen haben: *Bezeichnet* ε_0 *einen ad libitum gegebenen Kleinheitsgrad, so existirt stets eine positive ganze Zahl* p_0 *von solcher Grösse, dass die Formel*

$$\text{abs}\,(\Phi_x{}^p - \Phi_x) < \varepsilon_0\,, \quad (p \textit{ beliebig, aber} \geqq p_0)\,,$$

simultan erfüllt ist für alle Punkte x in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$. — Hierfür aber können wir kürzer sagen: *Die Function* Φ^p *convergirt, bei ins Unendliche wachsendem p, in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *gleichmässig gegen die Function* Φ.

Dass man Analoges in Betreff des Gebietes $\mathfrak{J}$ und der Function Ψ zu beweisen vermag, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Man gelangt daher zu folgendem Satz.

Theorem. — *In der Ebene oder im Raume sei eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, welche mit Ecken, resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf, welche aber überall convex, und keine zweisternige ist. Ferner sei auf σ irgend welche daselbst stetige Function f vorgeschrieben.*

Ueberdies sei [durch irgend welche Methode, oder vielleicht auch durch Zufall] *eine mit einem variablen Parameter p (= 1, 2, 3, 4, ...) behaftete Function f^p entdeckt, welche ebenfalls, und zwar für jedwedes p, auf σ stetig ist, und welche, bei ins Unendliche wachsendem p, für sämmtliche Punkte der Curve oder Fläche σ gleichmässig gegen f convergirt.*

Bezeichnet man alsdann die den Functionen f, f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ mit Φ, Φ^p und mit Ψ, Ψ^p, so wird Φ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ gleichmässig gegen Φ, und Ψ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ gleichmässig gegen Ψ convergiren.

Wir haben hier dieses Theorem unter der (besonders betonten) Voraussetzung bewiesen, dass σ *überall convex* und *nicht zweisternig* ist. Doch lässt sich das Theorem von diesen Restrictionen befreien. Um die hierzu erforderlichen Mittel zu gewinnen, werden wir in den beiden folgenden §§ zunächst einige *speciellere* Untersuchungen anzustellen haben.

§ 10.

Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels auf die Kreislinie.

Bringt man die Methode des arithmetischen Mittels auf eine *Kreislinie* σ in Anwendung, so tritt insofern eine Vereinfachung ein, als die ϑ_s durchweg $= 0$ werden. [Vgl. (9.) pag. 33.]

Die auf der *Kreislinie* σ vorgeschriebenen Werthe f oder f_s seien daselbst *stetig*, mithin darstellbar durch eine *Fourier'sche Reihe*:

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) ,$$

wo ω das *Azimuth* vorstellt, und die A, $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ Constanten sind. Dabei aber wollen wir zuvörderst auf *den* Fall uns beschränken,

dass diese Reihe *endlich* ist, dass mithin für jene f oder f_s eine Formel vorliegt von der Gestalt:

$$(1.) \quad f = f_s = A + \sum_{n=1}^{p} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \ ,$$

wo p irgend eine *endliche* Zahl vorstellen soll.

Es sei ϱ der *Radius* der Kreislinie σ; demgemäss seien (ϱ, ω) die *Polarcoordinaten* irgend eines auf σ liegenden Punktes s. Bezeichnet man nun den Abstand dieses Punktes $s\,(\varrho, \omega)$ von irgend einem Punkte $a\,(\varrho_a, \omega_a)$ mit E, so ergeben sich die Formeln:

$$E^2 = \varrho^2 + \varrho_a{}^2 - 2\varrho\varrho_a \cos(\omega - \omega_a) \ ,$$

$$T = \log \frac{1}{E} = \log \frac{1}{\varrho_a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n \cos n(\omega - \omega_a) \ , \quad (\varrho < \varrho_a) \ .$$

Nun ist nach (2.) pag. 28:

$$(d\sigma)_a = \frac{dT}{d\nu} d\sigma = -\frac{dT}{d\varrho} \varrho\, d\omega \ ,$$

wo ν die *innere* Normale von σ bezeichnet. Somit folgt:

$$(2.)_a \qquad (d\sigma)_a = -\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n \cos n(\omega - \omega_a)\right] d\omega \ .$$

In analoger Weise erhält man ferner für den Abstand E des Punktes $s\,(\varrho, \omega)$ von irgend einem Punkte $i\,(\varrho_i, \omega_i)$ die Formeln:

$$E^2 = \varrho^2 + \varrho_i{}^2 - 2\varrho\varrho_i \cos(\omega - \omega_i) \ ,$$

$$T = \log \frac{1}{E} = \log \frac{1}{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \cos n(\omega - \omega_i) \ , \quad (\varrho_i < \varrho) \ .$$

Bezeichnet man nun wiederum die *innere* Normale von σ mit ν, so ist nach (2.) pag. 28:

$$(d\sigma)_i = \frac{dT}{d\nu} d\sigma = -\frac{dT}{d\varrho} \varrho\, d\omega \ .$$

Somit folgt:

$$(2.)_i \qquad (d\sigma)_i = +\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \cos n(\omega - \omega_i)\right] d\omega \ .$$

Dies vorausgeschickt, haben wir nun zu verfahren nach den *allgemeinen Vorschriften* (pag. 78) der Methode des arithmetischen

Mittels, und in solcher Weise die Functionen W, f, W', f', etc., sodann die Functionen ξ, η, endlich die Functionen Φ, Ψ zu construiren. Die letzteren werden alsdann die *Lösungen der beiden Probleme*, d. i. *die den vorgeschriebenen Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{J}$ repräsentiren.

Nach jenen allgemeinen Vorschriften [vgl. (*A.*), (*B.*) pag. 78] ist:

$$(3.) \qquad W_a = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_a \ , \quad \text{und} \quad f_s' = W_{as} + f_s \ .$$

Hieraus folgt durch Substitution der Werthe (1.), $(2.)_a$ und durch Ausführung der Integration:

$$W_a = -\sum_{n=1}^{p}{}' \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega_a + B^{(n)} \sin n\omega_a) \ .$$

Lässt man jetzt in dieser Formel den Punkt $a\,(\varrho_a, \omega_a)$ unendlich nahe an den Kreislinienpunkt $s\,(\varrho, \omega)$ heranrücken, mithin ϱ_a in ϱ und ω_a in ω übergehen, so erhält man keineswegs das W_s, sondern vielmehr das W_{as} [vgl. den allgemeinen Satz pag. 46]; so dass man also zu folgender Formel gelangt:

$$W_{as} = -\sum_{n=1}^{p}{}' (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \ .$$

Substituirt man diesen Werth in der *zweiten* Formel (3.), und substituirt man daselbst gleichzeitig für f_s den Werth (1.), so folgt:

$$(4.) \qquad f_s' = A \ , \ \text{d. i} = \text{Const.}$$

Da nun von den Functionen f_s, f_s', f_s'', f_s''', etc. jede aus der vorhergehenden in genau derselben Weise entsteht, wie f_s' aus f_s, so gelangt man ohne Weiteres, auf Grund der bereits vorliegenden Formeln (1.), (4.), zu dem Resultate, dass $f_s'' = A$, dass ferner f_s''' ebenfalls $= A$ ist, u. s. w. Man erhält also:

$$(5.) \qquad f_s' = f_s'' = f_s''' = \ldots = A \ ,$$

mithin z. B.:

$$\lim_{n=\infty} f_s^{(n)} \text{ ebenfalls} = A \ .$$

Die in unseren allgemeinen Vorschriften auftretende Constante C [vgl. (*P.*) pag. 79] wird daher im gegenwärtigen Falle identisch mit A sein:

$$(6.) \qquad C = A \ .$$

Ferner sind nach jenen allgemeinen Vorschriften [vgl. (*Q.*) pag. 79] unter ξ, η folgende Functionen zu verstehen:

$$\xi = (C - f) + (C - f') + (C - f'') + \ldots$$
$$\eta = (f - f') + (f'' - f''') + (f^{(4)} - f^{(5)}) + \ldots$$

Hieraus folgt durch Substitution der Werthe (5.), (6.):

$$\xi = A - f \,, \qquad \eta = f - A \,. \tag{7.}$$

Und demgemäss ergeben sich, auf Grund unserer allgemeinen Vorschriften [vgl. (*R.*) pag. 79], für *die Lösungen* Φ *und* Ψ *der beiden Probleme* die Formeln:

$$\Phi_a = A + \frac{1}{\pi}\int (A - f)\,(d\sigma)_a \,, \qquad \Psi_i = A + \frac{1}{\pi}\int (f - A)\,(d\sigma)_i \,. \tag{8.}$$

Diese Formeln (8.) sind, mit Rücksicht auf die bekannten Relationen:

$$\int (d\sigma)_a = 0 \quad \text{und} \quad \int (d\sigma)_i = 2\pi \,, \quad \text{[vgl. (8.) pag. 33]} \,,$$

auch so darstellbar:

$$\Phi_a = +A - \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_a \,, \qquad \Psi_i = -A + \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_i \,. \tag{9.}$$

Beachtet man ferner, dass nach (1.)

$$\int f\,d\sigma = \int_0^{2\pi} f\varrho\,d\omega = 2\pi\varrho A \,, \quad \text{mithin} \quad A = \frac{1}{2\pi\varrho}\int f\,d\sigma$$

ist, so kann man die Formeln (9.) auch so schreiben:

$$\Phi_a = +\frac{1}{2\pi\varrho}\int f\,d\sigma - \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_a \,, \qquad \Psi_i = -\frac{1}{2\pi\varrho}\int f\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_i \,. \tag{10.}$$

Wir haben bisher nur *den* Fall betrachtet, dass die vorgeschriebenen Werthe f durch eine *endliche* Reihe (1.) dargestellt sind. Bevor wir zum Fall einer *unendlichen* Reihe übergehen, erscheint es gut, zunächst die Ausdrucksweise ein wenig zu ändern, nämlich die

bisher mit f, Φ, Ψ benannten Functionen fortan mit f^p, Φ^p, Ψ^p zu bezeichnen. Alsdann gelangen wir, auf Grund der Formeln (1.) und (10.), zu folgendem Satz:

Sind auf der Kreislinie σ die Werthe vorgeschrieben:

$$(11.)\quad f^p = f_s{}^p = A + \sum_{n=1}^{p} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \ ,$$

wo p irgend eine endliche Zahl vorstellt, so sind die diesen Werthen f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ^p und Ψ^p der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ leicht angebbar.

Einerseits nämlich werden dieselben auf σ mit jenen f^p identisch sein. Und andererseits werden dieselben für alle ausserhalb σ liegenden Punkte a, resp. für alle innerhalb σ befindlichen Punkte i darstellbar sein durch die Formeln:

$$(12.)\quad \begin{aligned} \Phi_a{}^p &= + \frac{1}{2\pi\varrho}\int f^p \, d\sigma - \frac{1}{\pi}\int f^p \, (d\sigma)_a \ , \\ \Psi_i{}^p &= - \frac{1}{2\pi\varrho}\int f^p \, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int f^p \, (d\sigma)_i \ , \end{aligned}$$

wo ϱ den Radius der Kreislinie σ vorstellt.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, dass auf σ irgend eine Function f in *ganz beliebiger Weise* vorgeschrieben ist, nur mit der Restriction, dass sie längs σ *stetig* sein soll. Diese Function f ist alsdann darstellbar durch eine *Fourier'sche Reihe:*

$$(13.)\quad f = A + \sum_{n=1}^{\infty} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \ ,$$

also darstellbar durch die Formel:

$$(14.)\quad f = \lim_{p=\infty} f^p \ ,$$

wo f^p dieselbe Bedeutung hat, wie in (11.).

Da nun, nach unserer Voraussetzung, die vorgeschriebene Function f auf σ *stetig* ist, so wird die in (14.) angegebene Convergenz, nach einem bekannten Satz*) über die Fourier'sche Reihe, *gleichmässig* sein für alle auf σ befindlichen Punkte. Demgemäss sind *die dieser vorgeschriebenen Function f entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$* sofort angebbar auf Grund des Theorems pag. 91, nämlich darstellbar durch die Formeln:

$$(15.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= \lim_{p=\infty} \Phi_a{}^p \ , \\ \Psi_i &= \lim_{p=\infty} \Psi_i{}^p \ , \end{aligned}$$

*) Heine: Handbuch der Kugelfunctionen. 1878. Bd. 1. pag. 58.

wo Φ_a^p, Ψ_i^p die in (12.) angegebenen Bedeutungen haben. Substituirt man aber diese Werthe der Φ_a^p, Ψ_i^p in (15.), so erhält man:

$$(16.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= \lim_{p=\infty} \left(\frac{1}{2\pi\varrho} \int f^p \, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int f^p \, (d\sigma)_a \right) , \\ \Psi_i &= \lim_{p=\infty} \left(-\frac{1}{2\pi\varrho} \int f^p \, d\sigma + \frac{1}{\pi} \int f^p \, (d\sigma)_i \right) . \end{aligned}$$

Die hier auftretende Operation $\lim_{p=\infty}$ ist in Anbetracht der Formel (14.), und namentlich in Anbetracht des Umstandes, dass jene durch (14.) ausgedrückte Convergenz für alle Punkte der Kreislinie σ *gleichmässig* ist, ohne Weiteres ausführbar; — man erhält:

$$(17.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= +\frac{1}{2\pi\varrho} \int f \, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int f (d\sigma)_a , \\ \Psi_i &= -\frac{1}{2\pi\varrho} \int f \, d\sigma + \frac{1}{\pi} \int f (d\sigma)_i , \end{aligned}$$

und gelangt daher zu folgendem Satz:

Satz über die Kreislinie. — *Sind auf einer gegebenen Kreislinie σ irgend welche daselbst stetige Werthe f vorgeschrieben, so sind die diesen Werthen entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{I}$ in einfacher Weise angebbar.*

Einerseits nämlich werden dieselben auf σ mit jenen f identisch sein. Und andererseits werden dieselben für alle ausserhalb σ liegenden Punkte a, resp. für alle innerhalb σ befindlichen Punkte i darstellbar sein durch die Formeln:

$$(18.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= +\frac{1}{2\pi\varrho} \int f \, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int f (d\sigma)_a , \\ \Psi_i &= -\frac{1}{2\pi\varrho} \int f \, d\sigma + \frac{1}{\pi} \int f (d\sigma)_i , \end{aligned}$$

wo ϱ den Radius von σ vorstellt.

Man kann übrigens diese Formeln [vgl. (2.) pag. 28] *auch so schreiben:*

$$(19.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= \frac{1}{\pi} \int \left(\frac{1}{2\varrho} - \frac{\cos\delta}{E} \right) f \, d\sigma , \\ \Psi_i &= \frac{1}{\pi} \int \left(-\frac{1}{2\varrho} + \frac{\cos\delta}{E} \right) f \, d\sigma ; \end{aligned}$$

hier bezeichnet E den Abstand des Punktes a oder i vom Elemente $d\sigma$, und δ den Winkel von E gegen die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale.

Substituirt man in (18.) für $d\sigma$, $(d\sigma)_a$, $(d\sigma)_i$ ihre analytischen Ausdrücke [vgl. (2.)$_a$ (2.)$_i$]:

$$d\sigma = \varrho\, d\omega ,$$

$$(d\sigma)_a = -\left[\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n \cos n(\omega - \omega_a)\right] d\omega ,$$

$$(d\sigma)_i = +\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \cos n(\omega - \omega_i)\right] d\omega ,$$

und gleichzeitig für f die Entwickelung (13.):

$$f = A + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega\right) , \tag{20.}$$

und führt man sodann die in jenen Formeln (18.) angedeuteten Integrationen wirklich aus, so gewinnen die Werthe der Φ_a, Ψ_i folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \Phi_a &= A + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega_a + B^{(n)} \sin n\omega_a) , \\ \Psi_i &= A + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega_i + B^{(n)} \sin n\omega_i) . \end{aligned} \tag{21.}$$

Diese *neuen* Formeln (21.) besitzen gegenüber den *ursprünglichen* Formeln (18.) einen wesentlichen Unterschied. Aus jenen *ursprünglichen* Formeln (18.) kann man nämlich die Werthe der Fundamentalfunctionen in einem *auf* σ liegenden Punkte s nur dadurch erhalten, dass man die Punkte a und i diesem Punkte s *sich ins Unendliche nähern* lässt (nämlich nur dadurch, dass man die betreffenden Convergenzwerthe Φ_{as} und Ψ_{is} bildet); — hingegen kann man aus den *neuen* Formeln (21.) die Werthe der Fundamentalfunctionen in s einfach dadurch erhalten, dass man a und i mit s *zur Coincidenz* bringt; wie sich solches durch Vergleich der Formeln (21.) mit (20.) sofort ergiebt.

Beiläufige Bemerkungen. — Man kann übrigens zur Lösung der beiden Probleme auf viel kürzerem Wege gelangen *ohne* die Methode des arithmetischen Mittels. Der Einfachheit willen beschränke ich mich bei den hierauf bezüglichen Auseinandersetzungen auf das *innere* Problem.

Setzt man ebenso wie früher:

$$(1.) \qquad f^p = A + \sum^{p}{}' (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \ ,$$

und

$$(2.) \qquad f = \lim_{p=\infty} f^p \ ,$$

und bezeichnet man die den vorgeschriebenen Functionen f^p und f entsprechenden Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{F}$ mit Ψ^p und Ψ, so ergiebt sich:

$$(3.) \quad \Psi_i{}^p = A + \sum^{p}{}' \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega_i + B^{(n)} \sin n\omega_i) \ ,$$

wo (ϱ_i, ω_i) die Polarcoordinaten des Punktes i sind, während ϱ den *Radius* der gegebenen Kreislinie σ vorstellt. In der That übersieht man leicht, dass dieser in (3.) angegebene Ausdruck den Bedingungen (1.), (2.) pag. 16 entspricht, und dass derselbe also eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{F}$ ist; und überdies erkennt man sofort, dass diese durch (3.) dargestellte Fundamentalfunction am *Rande* von $\mathfrak{F}$, d. i. auf σ, identisch wird mit den in (1.) vorgeschriebenen Werthen f^p.

Setzt man nun voraus, dass f auf σ *stetig* ist, so wird die in (2.) angegebene Convergenz auf σ *gleichmässig* sein, nach einem bekannten Satze über die Fourier'schen Reihen. Und demgemäss wird die der Function f entsprechende Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{F}$ ohne Weiteres angebbar sein auf Grund des Theorems pag. 91, nämlich dargestellt sein durch die Formel:

$$(4.) \qquad \Psi_i = \lim_{p=\infty} \Psi_i{}^p \ .$$

Auch wird diese Convergenz (4.), zufolge jenes Theorems, *gleichmässig* sein in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{F}$; so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Ist auf der Kreislinie σ eine daselbst stetige Function f vorgeschrieben, so wird dieselbe in eine auf σ gleichmässig convergirende Fourier'sche Reihe entwickelbar sein:

$$(5.) \qquad f = A + \sum^{\infty}{}' (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \ .$$

Und gleichzeitig wird alsdann die dieser Function f entsprechende Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{F}$ darstellbar sein durch folgende

in ganzer Erstreckung von $\Im$ gleichmässig convergirende Entwickelung:

$$(6.) \quad \Psi_i = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \ .$$

*Hier repräsentiren (ϱ_i, ω_i) die Polarcoordinaten des Punktes i, während ϱ den Radius der Kreislinie σ vorstellt**).

Bringt man jetzt auf die hier vorliegenden Verhältnisse den ersten Satz pag. 20 in Anwendung, so erkennt man sofort, dass für jedweden Punkt i die Formel stattfindet:

$$(7.) \qquad K \leqq \Psi_i \leqq G \ ,$$

wo K und G den *kleinsten* und *grössten* Werth von f auf der Kreislinie σ bezeichnen sollen.

Diese Bemerkungen (5.), (6.) und (7.) führen schliesslich, falls man zur Abkürzung den positiven ächten Bruch $\frac{\varrho_i}{\varrho}$ mit q bezeichnet, zu folgendem Resultat:

Satz über die Fourier'schen Reihen. — *Ist die mit irgend welchen Constanten A, $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ behaftete Reihe*

$$(\alpha.) \quad f(\omega) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)$$

*für alle Werthe von ω gleichmässig convergent***), *so gilt Gleiches auch von der Reihe:*

$$(\beta.) \quad \Psi(\omega) = A + \sum_{n=1}^{\infty} q^n (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \ ,$$

vorausgesetzt, dass die Constante q der Bedingung entspricht: $0 \leqq q \leqq 1$.

Und gleichzeitig wird alsdann für jedweden Werth von ω die Formel stattfinden:

$$(\gamma.) \qquad K \leqq \Psi(\omega) \leqq G \ ,$$

wo K und G den kleinsten und grössten Werth der Function $f(\omega)$ vorstellen sollen.

In ähnlicher Art werde ich späterhin zu einem verwandten Satze gelangen. Und diese Sätze sind nicht blos beiläufiger Natur, sondern für den weiteren Fortgang meiner Untersuchungen von Wichtigkeit.

---

*) Wir sind hier zu demselben Resultate gelangt, wie vorhin pag. 97 in der *zweiten* Formel (21.).

**) Aus dieser Voraussetzung folgt alsdann offenbar bereits von selber, dass $f(\omega)$ eine *stetige* Function von ω ist.

§ 11.

Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels auf die Kugelfläche.

Auf einer gegebenen *Kugelfläche* σ seien irgend welche Werthe vorgeschrieben, die daselbst *stetig* sind, mithin darstellbar sind durch eine *Laplace'sche Reihe*:

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}{}' Y^{(n)}(\mu, \omega) ,$$

wo A eine *Constante* bezeichnet. Dabei wollen wir aber zu Anfang auf *den* Fall uns beschränken, dass diese Reihe *endlich* ist, dass also jene vorgeschriebenen Werthe f oder f_s der Formel entsprechen:

$$(1.) \qquad f = f_s = A + \sum_{n=1}^{p}{}' Y^{(n)}(\mu, \omega) ,$$

wo p irgend eine *endliche* Zahl vorstellt.

Es sei ϱ der *Radius* der Kugelfläche σ; demgemäss seien $(\varrho, \vartheta, \omega)$ oder (ϱ, μ, ω) die *Polarcoordinaten* eines auf σ liegenden Punktes s. Dabei soll ω die *geographische Länge*, und ϑ das *Complement der geographischen Breite* sein; überdies soll $\mu = \cos\vartheta$ sein. Bezeichnet nun E den Abstand des Punktes $s(\varrho, \mu, \omega)$ von irgend einem Punkte $a(\varrho_a, \mu_a, \omega_a)$, und γ den Winkel, unter welchem ϱ und ϱ_a gegen einander geneigt sind, so gelten die Formeln:

$$E^2 = \varrho^2 + \varrho_a{}^2 - 2\varrho\varrho_a \cos\gamma ,$$

$$\cos\gamma = \mu\mu_a + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_a{}^2}\cos(\omega - \omega_a) ,$$

$$(A.) \quad T = \frac{1}{E} = \frac{1}{\varrho_a} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\varrho^n}{\varrho_a{}^{n+1}} P^{(n)}(\cos\gamma) , \quad (\varrho < \varrho_a) .$$

Bezeichnet man nun die *innere* Normale der Kugelfläche σ mit ν, so ist nach (2.) pag. 28

$$(d\sigma)_a = \frac{dT}{d\nu} d\sigma = -\frac{dT}{d\varrho}\varrho^2 \, d\mu \, d\omega ,$$

also, falls man für T den obigen Werth einsetzt:

$$(2.)_a \quad (d\sigma)_a = -\left[\sum_{n=1}^{\infty}{}' n \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1} P^{(n)}(\cos\gamma)\right] d\mu \, d\omega .$$

Bezeichnet man andererseits den Abstand des Punktes $s(\varrho, \mu, \omega)$ von irgend einem Punkte $i(\varrho_i, \mu_i, \omega_i)$ mit E und den Neigungswinkel von ϱ gegen ϱ_i mit γ, so wird:

$$E^2 = \varrho^2 + \varrho_i^2 - 2\varrho\varrho_i \cos\gamma ,$$

$$\cos\gamma = \mu\mu_i + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_i^2}\cos(\omega - \omega_i) ,$$

$$(J.) \quad T = \frac{1}{E} = \frac{1}{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_i^n}{\varrho^{n+1}} P^{(n)}(\cos\gamma) , \quad (\varrho_i < \varrho) ,$$

Bringt man also die allgemeine Formel (2.) pag. 28:

$$(d\sigma)_i = \frac{dT}{d\nu} d\sigma = -\frac{dT}{d\varrho} \varrho^2 d\mu\, d\omega$$

in Anwendung, in welcher ν die *innere* Normale bezeichnet, so ergiebt sich:

$$(2.)_i \quad (d\sigma)_i = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n P^{(n)}(\cos\gamma)\right] d\mu\, d\omega .$$

Dies vorangeschickt, haben wir nun zu verfahren nach den *allgemeinen Vorschriften* der Methode des arithmetischen Mittels. Nach (*A.*), (*B.*) pag. 78 ist:

$$(3.) \quad W_a = \frac{1}{2\pi} \int f (d\sigma)_a \quad \text{und} \quad f_s' = W_{as} + f_s .$$

Hieraus folgt durch Substitution der Werthe (1.), $(2.)_a$ und durch Ausführung der Integration:

$$W_a = -\sum_{n=1}^{p} \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1} Y^{(n)}(\mu_a, \omega_a) .$$

Lässt man in dieser Formel den Punkt $a(\varrho_a, \mu_a, \omega_a)$ unendlich nahe an den Kugelflächenpunkt $s(\varrho, \mu, \omega)$ heranrücken, mithin ϱ_a in ϱ, μ_a in μ, und ω_a in ω übergehen, so erhält man keineswegs das W_s, sondern das W_{as}, [vgl. den allgemeinen Satz pag. 46]; so dass man also zu folgender Formel gelangt:

$$W_{as} = -\sum_{n=1}^{p} \frac{2n}{2n+1} Y^{(n)}(\mu, \omega) .$$

Substituirt man diesen Werth in der *zweiten* Formel (3.), und substituirt man daselbst gleichzeitig für f_s den Werth (1.), so folgt:

$$(4.) \quad f_s' = A + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2n+1} Y^{(n)}(\mu, \omega) .$$

Da nun von den Functionen f_s, f_s', f_s'', f_s''', etc. jede aus der vorhergehenden in genau derselben Weise entsteht, wie f_s' aus f_s, so gelangt man, auf Grund der bereits vorliegenden Formeln (1.) und (4.), ohne Weiteres zu folgendem Formelsystem:

$$
\begin{aligned}
f_s &= A + \sum_{n=1}^{p} Y^{(n)}(\mu, \omega) \;, \\
f_s' &= A + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2n+1} Y^{(n)}(\mu, \omega) \;, \\
f_s'' &= A + \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 Y^{(n)}(\mu, \omega) \;, \\
f_s''' &= A + \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 Y^{(n)}(\mu, \omega) \;,
\end{aligned}
\tag{5.}
$$

etc. etc. etc.

Hieraus folgt sofort:

$$\lim_{n=\infty} f_s^{(n)} = A \;.$$

Die in unserm allgemeinen Schema [vgl. (*P.*) pag. 79] mit C bezeichnete Constante ist daher im gegenwärtigen Fall identisch mit A:

$$C = A \;. \tag{6.}$$

Substituirt man jetzt die Werthe (5.), (6.) in die allgemeinen Formeln [(*Q.*) pag. 79]:

$$
\begin{aligned}
\xi &= (C - f) + (C - f') + (C - f'') + \ldots \;, \\
\eta &= (f - f') + (f'' - f''') + (f^{(4)} - f^{(5)}) + \ldots \;,
\end{aligned}
$$

so ergiebt sich ohne grosse Mühe:

$$
\begin{aligned}
\xi &= -\sum_{n=1}^{p} \frac{2n+1}{2n} Y^{(n)}(\mu, \omega) \;, \\
\eta &= +\sum_{n=1}^{p} \frac{2n+1}{2n+2} Y^{(n)}(\mu, \omega) \;.
\end{aligned}
\tag{7.}
$$

Und demgemäss ergeben sich, auf Grund unserer allgemeinen Vorschriften [vgl. (*R.*) pag. 79] für die *Lösungen* Φ *und* Ψ *der beiden Probleme* die Formeln:

$$
\begin{aligned}
\Phi_a &= A - \frac{1}{2\pi} \int \left(\sum_{n=1}^{p} \frac{2n+1}{2n} Y^{(n)}(\mu, \omega) \right) (d\sigma)_a \;, \\
\Psi_i &= A + \frac{1}{2\pi} \int \left(\sum_{n=1}^{p} \frac{2n+1}{2n+2} Y^{(n)}(\mu, \omega) \right) (d\sigma)_i \;.
\end{aligned}
$$

Substituirt man hier für $(d\sigma)_a$ und $(d\sigma)_i$ ihre Werthe $(2.)_a$ und $(2.)_i$, so sind die [über $\mu = -1 \ldots +1$ und $\omega = 0 \ldots 2\pi$ sich erstreckenden] Integrationen sofort ausführbar; so dass man erhält:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= A + \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1} Y^{(n)}(\mu_a, \omega_a) , \\ \Psi_i &= A + \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^{n} Y^{(n)}(\mu_i, \omega_i) . \end{aligned}$$

Wir haben bisher nur *den* Fall betrachtet, dass die vorgeschriebenen f (1.) durch eine *endliche* Reihe dargestellt sind. Doch sind die für diesen beschränkten Fall erhaltenen Resultate (8.), mittelst des Theorems pag. 91 auf den allgemeinern Fall einer *unendlichen* Reihe ohne Weiteres übertragbar, falls man nur beachtet, dass die vorgeschriebenen Werthe f auf σ *stetig* sein sollen, dass also die diese Werthe ausdrückende ins Unendliche fortlaufende Laplace'sche Reihe, nach einem bekannten Satze*), auf σ *gleichmässig* convergirt. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Auf einer Kugelfläche σ seien irgend welche Werthe f vorgeschrieben, die daselbst stetig sind, und die daher darstellbar sind durch eine auf σ gleichmässig convergirende Laplace'sche Reihe:

$$(9.)\qquad f = A + \sum_{n=1}^{\infty} Y^{(n)}(\mu, \omega) ,$$

wo A eine Constante vorstellt.

Alsdann werden die diesen Werthen entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ dargestellt sein durch die Reihen:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1} Y^{(n)}(\mu_a, \omega_a) , \\ \Psi_i &= A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^{n+1} Y^{(n)}(\mu_i, \omega_i) , \end{aligned}$$

von denen die erstere gleichmässig convergirt in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$, während die letztere gleichmässig convergirt in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$.

Dabei bezeichnet ϱ den Radius der gegebenen Kugelfläche σ. Ferner sind $(\varrho_a, \mu_a, \omega_a)$ und $(\varrho_i, \mu_i, \omega_i)$ die Polarcoordinaten der Punkte a und i.

---

*) *Heine*: Handbuch der Kugelfunctionen. 1878, Bd. I. pag. 440.

Um die in (10.) auftretenden unendlichen Reihen zu *summiren*, sei aufmerksam gemacht auf die aus (*A*.) und $(2.)_a$ resultirende Formel:

$$+\frac{d\sigma}{4\pi\varrho E}-\frac{(d\sigma)_a}{2\pi}=\left[\frac{\varrho}{\varrho_a}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1}P^{(n)}(\cos\gamma)\right]\frac{d\mu\,d\omega}{4\pi}\ ,$$

sowie auf die aus (*J*.) und $(2.)_i$ sich ergebende Formel:

$$-\frac{d\sigma}{4\pi\varrho E}+\frac{(d\sigma)_i}{2\pi}=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^{n}P^{(n)}(\cos\gamma)\right]\frac{d\mu\,d\omega}{4\pi}\ ,$$

wobei unter E in der *ersteren* Formel der Abstand des Elementes $d\sigma\,(\varrho,\mu,\omega)$ vom Punkte a, in der *letzteren* hingegen der Abstand jenes Elementes vom Punkte i zu verstehen ist. Mit Rücksicht auf diese Formeln kann man den Ausdrücken (10.) folgende Gestalt verleihen:

$$(11.)\qquad \begin{aligned}\Phi_a&=\frac{1}{4\pi\varrho}\int\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_a}\right)f\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_a\ ,\\ \Psi_i&=-\frac{1}{4\pi\varrho}\int\frac{1}{E}f\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_i\ ,\end{aligned}$$

nämlich zeigen, dass diese letzteren Ausdrücke (11.), bei wirklicher Ausführung der Integration, in jene früheren Ausdrücke (10.) übergehen. Man gelangt daher zu folgendem Resultat:

Satz über die Kugelfläche. — *Sind auf einer gegebenen Kugelfläche σ irgend welche daselbst stetigen Werthe f vorgeschrieben, so sind die diesen Werthen entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ in ziemlich einfacher Weise angebbar.*

Einerseits werden nämlich dieselben auf σ mit jenen f identisch sein. Und andererseits werden dieselben für alle ausserhalb σ liegenden Punkte a, resp. für alle innerhalb σ befindlichen Punkte i darstellbar sein durch die Formeln:

$$(12.)\qquad \begin{aligned}\Phi_a&=\frac{1}{4\pi\varrho}\int\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_a}\right)f\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_a\ ,\\ \Psi_i&=-\frac{1}{4\pi\varrho}\int\frac{1}{E}f\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_i\ .\end{aligned}$$

Uebrigens kann man diese Formeln [vgl. (2.) pag. 28] *auch so schreiben:*

$$(13.)\qquad \begin{aligned}\Phi_a&=\frac{1}{2\pi}\int\left[\frac{1}{2\varrho}\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_a}\right)-\frac{\cos\delta}{E^2}\right]f\,d\sigma\ ,\\ \Psi_i&=\frac{1}{2\pi}\int\left[-\frac{1}{2\varrho}\frac{1}{E}+\frac{\cos\delta}{E^2}\right]f\,d\sigma\ .\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet ϱ den Radius der Kugelfläche σ, und ϱ_a den Centralabstand des Punktes a. Ueberdies bezeichnet E den Abstand des Punktes a oder i vom Elemente $d\sigma$, und δ denjenigen Winkel, unter welchem E gegen die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale geneigt ist.

Man bemerkt, dass dieser Satz über die *Kugelfläche*, seiner ganzen Form nach, parallel steht zu dem früher (pag. 96) über die *Kreislinie* aufgestelltem Satz.

§ 12.

Aufstellung eines sehr allgemeinen Theorems.

Es handelt sich hier um die weitere Verallgemeinerung des schon auf pag. 91 aufgestellten Theorems, oder vielmehr um die Befreiung dieses Theorems von der damaligen Restriction, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige* sein solle.

Wir werden zunächst nur den Fall der *Ebene*, d. h. den Fall einer *Curve* in Betracht ziehen, und hierbei Gebrauch machen von dem über die *Kreislinie* erhaltenen Specialsatz pag. 96. Jenem Specialsatz schliessen sich gewisse Zusätze an, von denen hier gleichfalls Gebrauch zu machen ist.

Jener Specialsatz lautete folgendermassen [vgl. (19.) pag. 96]: Sind auf einer *Kreislinie* σ_1 irgend welche daselbst *stetige* Werthe f_1 vorgeschrieben*), und bezeichnet man die beiden Gebiete, in welche die Ebene durch σ_1 zerlegt wird, mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{J}_1$, so wird die jenen Werthen f_1 entsprechende Fundamentalfunction Φ des Gebietes $\mathfrak{A}_1$ für alle *innerhalb* $\mathfrak{A}_1$ liegende Punkte x darstellbar sein durch die Formel:

$$(1.)\quad \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right) f_1\, d\sigma_1\,, \quad [x \text{ innerhalb } \mathfrak{A}_1]\,.$$

Hier ist ϱ_1 der *Radius* von σ_1. Ferner bezeichnet E den Abstand des Punktes x vom Elemente $d\sigma_1$, und δ den Winkel von E gegen die auf $d\sigma_1$ errichtete innere Normale.

---

*) Wir ersetzen hier *absichtlich* die früheren Bezeichnungen σ, ϱ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{J}$, f durch σ_1, ϱ_1, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{J}_1$, f_1, und zugleich die Bezeichnung a, i durch x.

Gleichzeitig wird alsdann die jenen Werthen f_1 entsprechende Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{I}_1$ für alle *innerhalb* $\mathfrak{I}_1$ liegenden Punkte x dargestellt sein durch folgende Formel:

$$(2.)\quad \Psi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1}+\frac{\cos\delta}{E}\right) f_1\, d\sigma_1\ ,\quad [x \text{ innerhalb } \mathfrak{I}_1]\ ,$$

wo ϱ_1, E, δ dieselben Bedeutungen haben wie in (1.).

Hieraus aber ergeben sich, falls man die *Definition* der Fundamentalfunctionen (pag. 16 und pag. 21) berücksichtigt, sofort folgende weitere Sätze:

Erster Zusatz. — Versteht man unter f_1 eine längs der Kreislinie σ_1 stetige Function, ferner unter $\mathfrak{A}_2$ irgend ein *vollständig innerhalb* $\mathfrak{A}_1$ liegendes Gebiet, so wird der in (1.) angegebene, mit E, δ behaftete, also von der Lage des variablen Punktes x abhängende Ausdruck

$$(3.)\qquad \int\left(\frac{1}{2\varrho_1}-\frac{\cos\delta}{E}\right) f_1\, d\sigma_1$$

eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ sein.

Zweiter Zusatz. — Ist eine längs σ_1 stetige Function f_1 gegeben, und versteht man unter $\mathfrak{I}_2$ irgend ein *vollständig innerhalb* $\mathfrak{I}_1$ liegendes Gebiet, so wird der in (2.) angegebene, mit E, δ behaftete, also von der Lage des variablen Punktes x abhängende Ausdruck:

$$(4.)\qquad \int\left(-\frac{1}{2\varrho_1}+\frac{\cos\delta}{E}\right) f_1\, d\sigma_1$$

eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{I}_2$ sein.

Solches vorangeschickt, gehen wir über zu unserm eigentlichen Thema. In der Ebene sei eine *ganz beliebige* geschlossene Curve σ gegeben, und auf derselben sei irgend welche daselbst *stetige* Function f vorgeschrieben. Ferner existire eine mit der veränderlichen Zahl p $(= 1, 2, 3, \ldots)$ behaftete Function f^p, welche ebenfalls [und zwar für jeden Werth der Zahl p] auf σ *stetig* ist, und welche, bei ins Unendliche wachsendem p, für alle auf σ befindlichen Punkte s *gleichmässig* gegen f convergirt. Ueberdies sei es [mittelst irgend welcher Methoden] geglückt, die dem f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ^p und Ψ^p der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{I}$ wirklich zu construiren. —

Wir wollen die Consequenzen entwickeln, die aus diesen Voraussetzungen sich ergeben, und dabei namentlich untersuchen, ob ebenso

wie f^p gegen f convergirt, ebenso vielleicht auch Φ^p und Ψ^p gegen bestimmte Limitalfunctionen convergiren, und ob ferner (falls solches der Fall sein sollte) *diese Limitalfunctionen die den f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ sind.*

Bezeichnet ε_0 einen *ad libitum* gewählten Kleinheitsgrad, so wird [in Folge der gleichmässigen Convergenz, welche die Function f^p nach unserer Voraussetzung besitzen soll] stets eine positive ganze Zahl p_0 existiren von solcher Grösse, dass die Formel

$$(5.) \qquad \text{abs}\,(f_s^p - f_s) < \varepsilon_0 \ , \quad (p \text{ beliebig, aber} \geqq p_0 \text{ gedacht}) \ ,$$

simultan erfüllt ist für alle auf σ befindlichen Punkte s. Man kann also diese Formel z. B. successive auf zwei Zahlen p und q anwenden, falls nur jede derselben $\geqq p_0$ ist. Durch Combination der so entstehenden beiden Formeln ergiebt sich alsdann sofort:

$$(5a.) \qquad \text{abs}\,(f_s^p - f_s^q) < 2\varepsilon_0 \ , \quad (p \text{ und } q \text{ beliebig, aber beide} \geqq p_0) \ ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(5b.) \qquad \text{abs}\,(\Phi_s^p - \Phi_s^q) < 2\varepsilon_0 \ , \quad (p \text{ und } q \text{ beliebig, aber beide} \geqq p_0) \ ;$$

denn es ist Φ_s^p identisch mit f_s^p, zufolge der für Φ^p gegebenen Definition; und ebenso Φ_s^q identisch mit f_s^q.

Beachtet man nun, dass die Formel (5*b*.) [ebenso wie (5.) und (5*a*.)], *simultan* stattfindet für alle Punkte s der gegebenen Curve σ, und beachtet man ferner, dass auf die Fundamentalfunction $\Phi^p - \Psi^q$ der erste Satz pag. 26 ohne Weiteres anwendbar ist; so gelangt man sofort zu der allgemeinen Formel*):

$$(5c.) \qquad \text{abs}\,(\Phi_x^p - \Phi_x^q) < 2\varepsilon_0 \ , \quad (p \text{ und } q \text{ beliebig, aber beide} \geqq p_0) \ ,$$

nämlich zu dem Resultate, dass die letztere Formel *simultan* stattfindet für sämmtliche Punkte x *in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{A}$. Also der Satz:

Bezeichnet ε_0 einen beliebigen Kleinheitsgrad, so existirt stets eine positive ganze Zahl p_0 von solcher Grösse, dass die Formel

$$(6.) \qquad \text{abs}\,(\Phi_x^p - \Phi_x^q) < 2\varepsilon_0 \ , \quad (p \text{ und } q \text{ beliebig, aber beide} \geqq p_0 \text{ gedacht}) \ ,$$

simultan erfüllt ist für sämmtliche Punkte x in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$.

---

*) Vgl. die Erläuterung auf pag. 90.

Markirt man also in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ irgend einen bestimmten *festen* Punkt x (a oder s), und lässt man also in dem Ausdruck Φ_x^p nur noch das p *variabel*, so sind die *Schwankungen* dieses Ausdruckes *jenseits* p_0 (d. i. für $p \geqq p_0$), durch Vergrösserung von p_0, unter jedweden Kleinheitsgrad $2\varepsilon_0$ hinabdrückbar. Man wird also z. B. für p_0 eine endliche Zahl von solcher Grösse angeben können, dass alle *jenseits* p_0 liegenden Werthe dieses Ausdruckes vom Werthe $\Phi_x^{p_0}$ um weniger als $\frac{1}{1000}$ abweichen. U. s. w.

Kurz, man gelangt auf Grund des Satzes (6.) zu dem Resultate, dass das jenem *festen* Punkte x entsprechende Φ_x^p, für $p = \infty$, gegen eine *feste endliche* Grenze convergirt. Bezeichnet man diese Grenze mit Φ_x^∞ oder kürzer mit Φ_x, so wird in solcher Weise, weil x in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ jede beliebige Lage haben darf, eine *neue* Function Φ_x *definirt* sein für alle Punkte x des Gebietes $\mathfrak{A}$, und zwar eine Function, die in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *endlich* ist.

Lässt man nun in (6.) die Zahl q ins Unendliche wachsen, so verwandelt sich daselbst das Φ_x^q in Φ_x^∞ d. i. in Φ_x. Man gelangt in solcher Weise also zu der Formel:

$$(7.) \quad \text{abs}\,(\Phi_x^p - \Phi_x) < 2\varepsilon_0\,, \quad (p \text{ beliebig, aber} \geqq p_0 \text{ gedacht})\,;$$

und zwar zu dem Resultate, dass diese Formel [ebenso wie (6.) selber] *simultan* stattfindet für alle Punkte x in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$. Mit anderen Worten: Man gelangt zu dem Resultat, dass die Function Φ_x^p, bei ins Unendliche wachsendem p, für alle Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$ *gleichmässig* gegen Φ_x convergirt.

(A.) Wir haben somit nachgewiesen, dass eine in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ überall *endliche* Function Φ_x existirt, von solcher Beschaffenheit, dass die gegebene Function Φ_x^p, bei ins Unendliche wachsendem p, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *gleichmässig* gegen Φ_x convergirt.

Da Φ_x^p, seiner Definition zufolge (nämlich als Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$), in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *stetig* ist, so liegt es nahe zu vermuthen, dass Gleiches auch gelten wird von der neuen Function Φ_x. Auch liegt es nahe zu vermuthen, dass Φ_x, ebenso wie Φ_x^p, an der Grenze von $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ identisch sein wird mit f.

Um näher hierauf einzugehen, markiren wir in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ irgend einen Punkt x (a oder s), und beschreiben um diesen *festen*

Punkt x (als Centrum) eine Kreisperipherie vom Radius ϱ. Diesen Radius ϱ wird man offenbar*) so klein machen können, dass für zwei auf $\mathfrak{A}$ beschränkte, sonst aber innerhalb der genannten Peripherie frei bewegliche Punkte x_1 und x_2 *fortdauernd* die Relation stattfindet:

$$\text{(8.)} \qquad \text{abs}\,(\Phi_{x_1}{}^p - \Phi_{x_2}{}^p) < \varepsilon_0 \ .$$

Dabei mag p beliebig fixirt, aber $\geqq p_0$ gedacht, und unter ε_0 derselbe Kleinheitsgrad wie in (7.) verstanden werden. In dieser Formel (8.) kann man alsdann, zufolge (7.), Φ^p mit Φ vertauschen, ohne dabei einen Fehler von mehr als $4\varepsilon_0$ hineinzubringen. Somit ergiebt sich die Formel:

$$\text{(9.)} \qquad \text{abs}\,(\Phi_{x_1} - \Phi_{x_2}) < 5\varepsilon_0 \ ,$$

und zwar wiederum als gültig für zwei auf $\mathfrak{A}$ beschränkte, sonst aber innerhalb jener [mit dem Radius ϱ um x beschriebenen] Kreisperipherie frei bewegliche Punkte. Demgemäss ist Φ im Centrum x dieser Peripherie *stetig* zu nennen, also, weil x in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ beliebig gewählt war, auch *stetig* zu nennen *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{A}$.

Was ferner die Werthe von Φ *an der Grenze* von $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ betrifft, so gilt für jedweden auf σ gelegenen Punkt s die Formel:

$$\Phi_s{}^p = f_s{}^p \ ,$$

zufolge der Definition von Φ^p. Lässt man aber hier die Zahl p ins Unendliche wachsen, so folgt:

$$\text{(9a.)} \qquad \Phi_s = f_s \ .$$

Somit sehen wir unsere Vermuthungen bestätigt, und gelangen also zu folgendem Satz:

(B.) Die in (A.) definirte Function Φ_x oder Φ ist in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *stetig*, und an der Grenze von $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ identisch mit f.

Wir haben jetzt, um unser eigentliches Ziel zu erreichen, noch die Differentialquotienten von Φ *zu untersuchen.*

Man markire *innerhalb* $\mathfrak{A}$ irgend einen Punkt a (vgl. die folgende Figur), beschreibe um a (als Centrum) zwei *vollständig innerhalb* $\mathfrak{A}$

*) Weil nämlich $\Phi_x{}^p$ eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, mithin in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *stetig* ist.

liegende Kreislinien σ_1 und σ_2 mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2, $(\varrho_1 > \varrho_2)$, und bezeichne das von σ_1 umschlossene Gebiet mit $\mathfrak{I}_1$, das von σ_2 umschlossene mit $\mathfrak{I}_2$. Alsdann ist z. B. $\mathfrak{I}_1$ ein *Theil* von $\mathfrak{A}$. Folglich wird die Fundamentalfunction Φ^p des Gebietes $\mathfrak{A}$ zugleich auch eine Fundamentalfunction von $\mathfrak{I}_1$ sein, mithin für alle *innerhalb* $\mathfrak{I}_1$ liegenden Punkte x darstellbar sein durch die Formel (2.):

$$(10.) \qquad \Phi_x{}^p = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1{}^p\, d\sigma_1\,, \quad (x \text{ innerhalb } \mathfrak{I}_1)\,,$$

wo $\Phi_1{}^p$ den Werth von Φ^p im Elemente $d\sigma_1$ vorstellt.

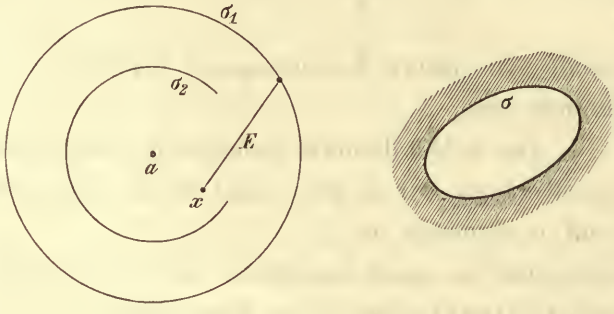
Fraglich ist, ob diese Formel (10.) noch Gültigkeit behält, wenn man in ihr Φ^p durch Φ ersetzt. Bezeichnet man vorläufig den durch diese Substitution hineintretenden Fehler mit Δ, setzt man also:

$$(11.) \qquad \Delta_x + \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1\, d\sigma_1\,, \quad (x \text{ innerhalb } \mathfrak{I}_1)\,,$$

so folgt aus (10.), (11.) durch Subtraction:

$$(12.) \quad \Delta_x + (\Phi_x - \Phi_x{}^p) = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right)(\Phi_1 - \Phi_1{}^p)\, d\sigma_1\,, \quad (x \text{ innerhalb } \mathfrak{I}_1)\,.$$

Dabei ist zu beachten, dass das hier eingeführte Δ_x [seiner Definition (11.) zufolge] von p *unabhängig* ist, also für einen *gegebenen* Punkt x jedesmal einen *völlig bestimmten*, *festen* Werth besitzt.



Beschränkt man jetzt den Punkt x auf das Gebiet $\mathfrak{I}_2$ (welches ein *Theil* von $\mathfrak{I}_1$ ist), so wird die Entfernung E des Punktes x vom Elemente $d\sigma_1$ stets $\geqq (\varrho_1 - \varrho_2)$, also

$$\frac{1}{E} \text{ stets } \leqq \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}$$

sein. Bezeichnet man also den *absolut grössten* Werth von $(\Phi - \Phi^{p})$ in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ mit M^{p}, so ergiebt sich aus (12.) *für alle Punkte* x *des Gebietes* $\mathfrak{F}_2$ die Formel:

$$\text{abs}\,\Delta_x \leqq M^{p} + \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}\right) M^{p}\, d\sigma_1 \,, \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{F}_2),$$

also, weil $\int d\sigma_1 = 2\pi\varrho_1$ ist:

$$(13.) \qquad \text{abs}\,\Delta_x \leqq 2 M^{p}\left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}\right), \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{F}_2) \,.$$

Beachtet man nun, dass Δ_x für einen *bestimmten* Punkt x des Gebietes $\mathfrak{F}_2$ einen (von p unabhängigen) *völlig bestimmten festen* Werth hat, dass aber andererseits die *rechte Seite* der Formel (13.), wie aus der Definition von M^{p} folgt, durch Vergrösserung der Zahl p unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar ist, so ergiebt sich aus dieser Formel (13.) sofort:

$$(14.) \qquad \Delta_x = 0 \,, \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{F}_2) \,.$$

Demgemäss gewinnt die Formel (11.) für alle Punkte x des hier betrachteten Gebietes $\mathfrak{F}_2$ die einfachere Gestalt:

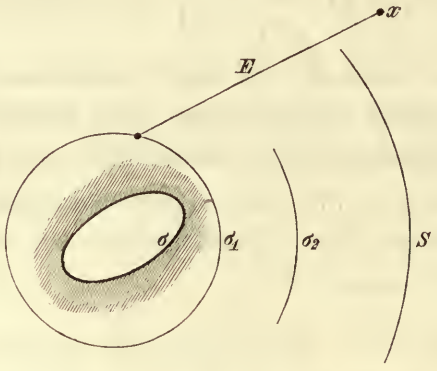
$$(15.) \quad \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1\, d\sigma_1 \,, \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{F}_2) \,.$$

Hieraus aber folgt, mit Rücksicht auf den Satz (4.), sofort, *dass* Φ *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{F}_2$ *ist.* Beachtet man daher die bekannten Eigenschaften einer solchen Fundamentalfunction [vgl. pag. 16], und beachtet man ferner, dass der Mittelpunkt a des Gebietes $\mathfrak{F}_2$ innerhalb $\mathfrak{A}$ *beliebig* gewählt war, so gelangt man zu folgendem Resultate:

> In jedem Punkte a, der *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, sind die ersten und zweiten Ableitungen von Φ nach x, y *stetig.* Auch findet in jedem solchen Punkte a die Gleichung statt:
>
> $$(\Gamma.) \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \,.$$
>
> Dabei sind unter x, y *die rechtwinkligen Coordinaten* des Punktes a zu verstehen.

Man construire jetzt drei concentrische Kreislinien σ_1, σ_2, S, welche die gegebene Curve σ *umschliessen*, und *vollständig innerhalb*

$\mathfrak{A}$ liegen, und bezeichne die Radien dieser Kreise mit ϱ_1, ϱ_2, R, $(\varrho_1 < \varrho_2 < R)$. Ferner bezeichne man das *ausserhalb* σ_1 liegende und von σ_1 *begrenzte* Gebiet der Ebene mit $\mathfrak{A}_1$, ebenso das *ausserhalb* σ_2 liegende und von σ_2 *begrenzte* Gebiet mit $\mathfrak{A}_2$; so dass also $\mathfrak{A}_2$ ein *Theil* von $\mathfrak{A}_1$ ist, und $\mathfrak{A}_1$ ein *Theil* von $\mathfrak{A}$. — In der hier folgenden Figur sind die drei Kreislinien (der Raumersparniss willen) nicht völlig ausgezogen, sondern nur angedeutet.



Φ^p ist eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, also auch eine Fundamentalfunction von $\mathfrak{A}_1$, also für alle *innerhalb* $\mathfrak{A}_1$ liegenden Punkte x darstellbar durch die Formel (1.):

$$(16.) \qquad \Phi_x{}^p = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1{}^p\, d\sigma_1 \ , \quad (x \text{ innerhalb } \mathfrak{A}_1) \ ,$$

wo $\Phi_1{}^p$ den Werth von Φ^p im Elemente $d\sigma_1$ vorstellt.

Fraglich ist, ob diese Formel (16.) gültig bleibt bei einer Vertauschung von Φ^p mit Φ. Bezeichnet man den durch eine solche Vertauschung entstehenden Fehler mit Δ_x, setzt man also:

$$(17.) \qquad \Delta_x + \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1\, d\sigma_1 \ , \quad (x \text{ innerhalb } \mathfrak{A}_1) \ ,$$

so folgt aus (16.), (17.) durch Subtraction:

$$(18.) \quad \Delta_x + (\Phi_x - \Phi_x{}^p) = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right)(\Phi_1 - \Phi_1{}^p)\, d\sigma_1 \ , \ (x \text{ innerhalb } \mathfrak{A}_1) \ .$$

Um nun das (von p unabhängige) Δ_x zu ermitteln, beschränken wir den Punkt x auf das (einen *Theil* von $\mathfrak{A}_1$ bildende) Gebiet $\mathfrak{A}_2$. Alsdann ist der Abstand E des Punktes x von $d\sigma_1$ stets $\geqq (\varrho_2 - \varrho_1)$, mithin

$$\frac{1}{E} \text{ stets } \leqq \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \ .$$

Bezeichnen wir also den *absolut grössten* Werth von $(\Phi - \Phi^p)$ in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ [ebenso wie früher] mit M^p, so ergiebt sich aus (18.) *für alle Punkte x des Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ die Formel:

$$\text{abs}\,\Delta_x \leqq \mathsf{M}^p + \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}\right)\mathsf{M}^p\, d\sigma_1 ,$$

also, weil $\int d\sigma_1 = 2\pi\varrho_1$ ist:

$$\text{(19.)}\qquad \text{abs}\,\Delta_x \leqq 2\,\mathsf{M}^p\left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1}\right), \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{A}_2).$$

Hieraus aber folgt, durch dieselben Ueberlegungen wie früher bei (13.):

$$\text{(20.)}\qquad \Delta_x = 0 , \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{A}_2) .$$

Demgemäss gewinnt die Formel (17.) für *die Punkte x dieses Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ die einfachere Gestalt:

$$\text{(21.)}\qquad \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1\, d\sigma_1 , \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{A}_2) .$$

Hieraus aber folgt, mit Rücksicht auf den Satz (3.), *dass* Φ *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ *ist.*

Demgemäss ergiebt sich, aus den bekannten Eigenschaften der Fundamentalfunctionen [vgl. den Satz pag. 23], z. B. folgendes Resultat:

Für den in der letzten Figur angedeuteten Kreis S findet die Formel statt:

$$\text{(}\Delta\text{.)}\qquad \int\frac{d\Phi}{dR}\, dS = 0 ,$$

wo R den Radius des Kreises vorstellt.

Und gleichzeitig ergiebt sich aus dem Umstande, *dass* Φ *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ *ist*, auch noch folgender Satz [vgl. (4.) pag. 22]:

(E.) Die Werthdifferenzen, welche Φ *ausserhalb* des in der letzten Figur gezeichneten Kreises S besitzt, sind, durch Vergrösserung des Radius R dieses Kreises, unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar.

Blicken wir nun zurück auf die soeben constatirten Eigenschaften (A.), (B.), (Γ.), (Δ.), (E.) unserer Function Φ, so erkennen wir [vgl. pag. 21] nicht nur, dass Φ eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ ist; sondern zugleich auch, mit Rücksicht auf (B.), dass diese Fundamentalfunction Φ *an der Grenze* des Gebietes $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ *identisch ist mit den daselbst vorgeschriebenen Werthen f.*

Wir haben hiermit unser vorläufiges Ziel erreicht. Denn wir übersehen leicht, dass unsere Betrachtungen über Φ^p in analoger Weise bei Ψ^p wiederholbar sind.

Desgleichen übersehen wir leicht, dass fast genau dieselben Betrachtungen, wie hier in der *Ebene*, auch im *Raume* anstellbar sind. Der einzige Unterschied wird nur darin bestehen, dass, statt des die *Kreislinie* betreffenden Specialsatzes (19.) pag. 96, alsdann der die *Kugelfläche* betreffende Specialsatz (13.) pag. 104 anzuwenden ist. — Demgemäss gelangen wir zu folgendem

Theorem. — *In der Ebene oder im Raume sei eine ganz beliebige geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, die z. B. auch mit Ecken, resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf. Ferner sei auf σ irgend welche daselbst stetige Function f vorgeschrieben.*

Ueberdies sei [durch irgend welche Methode oder durch Zufall] *eine mit einem variablen Parameter p behaftete Function f^p gefunden, welche ebenfalls, und zwar für jedwedes p, auf σ stetig ist, und welche, bei ins Unendliche wachsendem p, für alle auf σ liegenden Punkte gleichmässig gegen f convergirt.*

*Gelingt es alsdann, die dieser Function f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ^p und Ψ^p der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ zu construiren**), *so wird hierdurch zugleich auch die Existenz derjenigen Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ bewiesen sein, welche den eigentlich vorgeschriebenen Werthen f entsprechen.*

Und zwar wird Φ^p, bei ins Unendliche wachsendem p, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ gleichmässig gegen Φ convergiren. Und ebenso wird Ψ^p, für $p = \infty$, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ gleichmässig gegen Ψ convergiren.

---

*) Ist die gegebene Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige*, so sind Φ^p und Ψ^p construirbar durch die Methode des arithmetischen Mittels.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
BERKELEY 4, CALIFORNIA

Nachträgliche Bemerkungen.

Erste Bemerkung. — Im Anschluss an eine Stelle der Einleitung (pag. 3, 4) mag hier noch folgender Satz mitgetheilt werden, durch welchen das dort Gesagte bedeutend verallgemeinert wird:

Ist die Methode des arithmetischen Mittels für irgend eine geschlossene Curve convergent und correct, so wird sie diese Eigenschaften auch haben für jedwede andere Curve, welche aus jener durch die dem Gesetz der reciproken Radien entsprechende Transformation entsteht.

Ich behalte mir vor, den Beweis dieses Satzes bei späterer Gelegenheit mitzutheilen. Ob aber ein analoger Satz auch im *Raume* für geschlossene Flächen existirt, muss vorläufig noch dahingestellt bleiben. Jedenfalls ist hier im *Raume* die betreffende Untersuchung eine wesentlich andere, und bei weitem schwieriger als im Fall der Ebene.

Zweite Bemerkung. — In Betreff der Formeln (*Q.*) pag. 79:

$$(Q.)\qquad \begin{aligned} \xi &= (C-f)+(C-f')+(C-f'')+\ldots. \\ \eta &= (f-f')+(f''-f''')+(f^{(4)}-f^{(5)})+\ldots. \end{aligned}$$

sei bemerkt, dass man dieselben auch so schreiben kann:

$$(Q'.)\qquad \begin{aligned} \xi &= +(C-f)+(C-f')+(C-f'')+(C-f''')++\ldots. \\ \eta &= -(C-f)+(C-f')-(C-f'')+(C-f''')-+\ldots; \end{aligned}$$

woraus z. B. folgt:

$$(Q''.)\qquad \begin{aligned} \frac{\xi+\eta}{2} &= (C-f')+(C-f''')+(C-f^{(5)})+\ldots, \\ \frac{\xi-\eta}{2} &= (C-f)+(C-f'')+(C-f^{(4)})+\ldots. \end{aligned}$$

Dabei ist im Auge zu behalten, dass alle diese Formeln nach den angegebenen *Binomen* fortschreiten, und ihre Convergenz und Gültigkeit verlieren würden, falls man diese Binome *zerreissen* wollte. So z. B. würde die Formel

$$\eta = f-f'+f''-f'''+f^{(4)}-f^{(5)}+-\ldots$$

schon deswegen *sinnlos* sein, weil $f^{(n)}$ bei wachsendem n nicht gegen 0, sondern gegen die Constante C convergirt, letztere aber im Allgemeinen von 0 verschieden ist.

Was den Beweis der Formeln (*Q.*), (*Q'.*), (*Q''.*) betrifft, so ist die *erste* der beiden Formeln (*Q'.*) bereits constatirt worden durch die Betrachtungen pag. 83—87. Und genau in derselben Art und Weise ist auch die *zweite* dieser beiden Formeln beweisbar. Sobald aber die beiden Formeln (*Q'.*) *bewiesen* sind, ergiebt sich hieraus ohne Weiteres auch die Richtigkeit der Formeln (*Q.*) und (*Q''.*).

Dritte Bemerkung. — Bei dem Beweise, den ich für den Hülfssatz pag. 96 gegeben habe, ist von mir *stillschweigend* voraus-

gesetzt worden, dass die Function f längs der gegebenen Kreislinie nicht nur *stetig*, sondern auch *abtheilungsweise monoton* sei. Doch betrifft das nur den *Beweis* des Satzes, nicht aber seinen *Inhalt*. In der That ist hervorzuheben, dass der Satz selber, in der ihm auf pag. 96 zuertheilten Fassung, *vollständig correct* ist. [Vgl. meine Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie, II. Aufl., 1884, pag. 410].

Aehnliches ist zu bemerken hinsichtlich des die Kugelfläche betreffenden Hülfssatzes pag. 104. Ich behalte mir vor, auf diesen Gegenstand später von Neuem zurückzukommen.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	3
Kurze Uebersicht über den Inhalt der einzelnen Paragraphe	7
§ 1. Die Fundamentalfunctionen des von einer geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzten inneren Gebietes $\mathfrak{J}$	16
§ 2. Die Fundamentalfunctionen des von σ begrenzten äusseren Gebietes $\mathfrak{A}$	21
§ 3. Definition der Potentiale W, w. Berechnung von w	27
§ 4. Allgemeine Eigenschaften des Potentiales W	34
§ 5. Ueber die mit dem Potential W zusammenhängenden unendlich vielen Functionen f, f', f'', f''', etc.	48
§ 6. Genauere Untersuchung der im vorhergehenden Paragraph eingeführten variablen Grösse ζ	60
§ 6a. An Stelle von ζ wird eine etwas andere Variable z eingeführt, und letztere näher untersucht	73
§ 7. *Das äussere und innere Problem. Lösung derselben nach der Methode des arithmetischen Mittels*	77
§ 8. Beweis für die Richtigkeit der angegebenen Lösungen. Das schliesslich sich ergebende *Existenztheorem*	83
§ 9. Sich anschliessende Betrachtungen	88
§ 10. Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels auf die Kreislinie	91
§ 11. Anwendung derselben auf die Kugelfläche	100
§ 12. Aufstellung eines sehr *allgemeinen Theorems*	105
Nachträgliche Bemerkungen	115

Verbesserung.

Auf Seite 55 ist in der siebenten Zeile v. u. zu lesen »*der Formel* (26.)« statt »*der Formel* (24.).«

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

ÜBER DIE METHODE

DES

ARITHMETISCHEN MITTELS,

ZWEITE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ XIII.

MIT NEUNZEHN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1888.

Das Manuscript übergeben am 6. August 1888.
Der Abdruck vollendet den 10. November 1888.

ÜBER DIE METHODE

DES

ARITHMETISCHEN MITTELS.

ZWEITE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KGL. SÄCHS. GESELLSCH. DER WISSENSCHAFTEN.

Die Methode des arithmetischen Mittels giebt nicht nur den Existenzbeweis der betreffenden Functionen, sondern liefert auch für diese Functionen bestimmte *analytische Ausdrücke*, und ermöglicht hierdurch eine tiefer gehende Untersuchung dieser Functionen. Derartige Untersuchungen sollen nun in der vorliegenden Abhandlung wirklich angestellt werden.

Die unendliche Ebene sei durch eine geschlossene Curve in einen *innern* Theil $\mathfrak{I}$, und einen *äussern* Theil $\mathfrak{A}$ zerlegt. Und zwar mag jene Curve, unter Zugrundelegung eines *positiven* Axensystems x, y, gegeben sein durch die simultanen Gleichungen:

$$(A.) \qquad \xi = \mathfrak{f}(t) \quad \text{und} \quad \eta = \mathfrak{g}(t) .$$

Sodann aber mag nachträglich, statt der independenten Variable t, die Bogenlänge σ eingeführt, und die so entstehende Gestalt der beiden Gleichungen mit:

$$(B.) \qquad \xi = \mathfrak{F}(\sigma) \quad \text{und} \quad \eta = \mathfrak{G}(\sigma)$$

bezeichnet sein. Dabei mag die Bogenlänge σ, von irgend einem festen Punkte aus, gerechnet sein in der Richtung der *positiven Tangente* τ, d. i. in derjenigen Richtung, welche zur *innern Normale* ν ebenso liegt, wie die x-Axe zur y-Axe.

Bezeichnet man also für irgend einen Curvenpunkt (ξ, η) die Richtungscosinus der positiven Tangente τ mit α, β, ferner die Richtungscosinus der innern Normale ν mit A, B, und versteht man überdies unter θ das Azimuth von τ gegen die x-Axe, so werden die Formeln stattfinden:

$$(C.) \qquad \begin{cases} \alpha = \cos\theta = \dfrac{d\xi}{d\sigma} = \xi' , \\ \beta = \sin\theta = \dfrac{d\eta}{d\sigma} = \eta' , \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = -\sin\theta = -\eta' , \\ \mathsf{B} = \cos\theta = \xi' : \end{cases}$$

woraus z. B. folgt:

$$(D.) \qquad \xi'^2 + \eta'^2 = 1 \,.$$

Bezeichnet man ferner den *Krümmungsradius* der Curve im Punkte (ξ, η) mit R, so ist:

$$(E.) \qquad \frac{1}{R} = \varepsilon \frac{d\theta}{d\sigma} = \varepsilon\theta' = \varepsilon(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') \,,$$

wo die Accente, ebenso wie in $(C.)$, $(D.)$, Differentiationen nach der Bogenlänge σ andeuten. Das in $(E.)$ enthaltene ε ist $= +1$ oder $= -1$, je nachdem der betreffende Krümmungskreis ein *innerer* oder *äusserer* ist, d. i. je nachdem derselbe die gegebene Curve *von Innen* oder *von Aussen* berührt.

Determinationen.

Um für unsere Untersuchungen ein brauchbares festes Fundament zu gewinnen, wollen wir für die vorliegende Abhandlung, ein für alle Mal, Folgendes festsetzen:

I. — *Die gegebene geschlossene Curve soll keine Doppelpunkte haben; so dass also durch sie die unendliche Ebene immer nur in zwei Theile* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{A}$ *zerlegt wird.*

II. — *Die Coordinaten* ξ, η *sollen stetige Functionen der Bogenlänge* σ *sein. Ueberdies soll* θ *entweder ebenfalls eine stetige, oder doch wenigstens eine abtheilungsweise stetige Function von* σ *sein.*

III. — *Der Umfang* Σ *der Curve soll einen bestimmten endlichen Werth besitzen.*

IV. — *Die Curve soll von solcher Beschaffenheit sein, dass die Anzahl der durch die Curve auf irgend einer geraden Linie markirten Punkte stets* $\leqq N$ *ist, wo* N *eine bestimmte endliche Zahl vorstellt. Diese Zahl* N *kann alsdann etwa als der Rang der Curve bezeichnet werden.*

V. — *Im Allgemeinen soll jede längs der Curve vorgeschriebene Function* f *als eine eindeutige und periodische Function der Bogenlänge* σ *angesehen werden; so dass also die Formel gilt:*

$$f = f(\sigma) = f(\sigma + m\Sigma) \,,$$

wo m *jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, während* Σ *den Umfang der Curve vorstellt. Wird also von einer*

solchen Function z. B. gesagt, sie sei überall stetig, so ist dadurch schon mitausgedrückt, dass sie für $\sigma = 0$ und für $\sigma = \Sigma$ ein und denselben Werth hat.

Ausser solchen periodischen Functionen, zu denen z. B. ξ, η, α, β, A, B, R gehören [vgl. die Formeln (*B.*), (*C.*), (*D.*), (*E.*)], *werden aber auch nichtperiodische Functionen in Betracht kommen, wie z. B. θ.*

Erste Bemerkung (zu II.). — Ich nenne eine Function $F(x)$ in einem gegebenen Intervall $a \ldots b$ *abtheilungsweise stetig,* sobald dieses Intervall in eine *endliche* Anzahl von Strecken zerlegbar ist, der Art, dass die Function $F(x)$ längs jeder einzelnen Strecke stetig bleibt.

Ist also, was den hier vorliegenden Fall betrifft, θ eine *abtheilungsweise stetige* Function der Bogenlänge σ, so wird die gegebene Curve eine *endliche* Anzahl von *Ecken* besitzen. Mit anderen Worten: Es wird alsdann die Curve ein *Polygon* sein; und θ wird *unstetig* sein in den Ecken dieses Polygons, hingegen *stetig* sein längs jeder einzelnen Seite des Polygons.

Zweite Bemerkung (zu IV.). — Für einen Kreis oder für eine Ellipse ist die Zahl $N = 2$. Für die Peripherie eines Quadrates ist sie aber ebenfalls $= 2$. Denn giebt man z. B. der geraden Linie (welche selbstverständlich nach beiden Seiten ins Unendliche laufen soll) eine solche Lage, dass zwei aufeinanderfolgende Ecken p, q des Quadrates in die Linie hineinfallen, so werden offenbar auf dieser Linie durch die Peripherie des Quadrates im Ganzen nur *zwei* bestimmte Punkte markirt, nämlich nur die Punkte p und q selber. Und giebt man jener Linie irgend welche andere Lage, so wird die Anzahl der auf ihr durch die Peripherie des Quadrates markirten Punkte je nach Umständen bald $= 0$, bald $= 1$, bald $= 2$, niemals aber > 2 sein.

Plan der Untersuchung.

Das eigentliche Ziel, dem die vorliegenden Untersuchungen zustreben — von einer wirklichen Erreichung desselben kann selbstverständlich nicht die Rede sein — besteht in der genaueren Untersuchung gewisser Ableitungen oder Differentialquotienten, nämlich in der Absolvirung zweier Aufgaben, von denen die *eine* folgendermassen lautet:

Es sei $\Psi = \Psi(x, y)$ eine Function, welche *in Erstreckung* des Gebietes $\mathfrak{J}$ eindeutig und stetig, welche ferner *innerhalb* $\mathfrak{J}$, sammt ihren ersten und zweiten Ableitungen, stetig und der Gleichung $\Delta\Psi = 0$ entsprechend ist, und welche endlich *am Rande* von $\mathfrak{J}$

vorgeschriebene Werthe f besitzt. Es soll das Verhalten der Ableitungen $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ *in unmittelbarer Nähe des Randes* genauer untersucht werden.

Die *zweite* der in Rede stehenden Aufgaben bezieht sich in analoger Weise auf das Gebiet $\mathfrak{A}$. Und bei beiden Aufgaben mögen die vorgeschriebenen Randwerthe dargestellt gedacht sein durch *ein und dieselbe* Function der Bogenlänge: $f = f(\sigma)$.

Bedienen wir uns des Wortes: Fundamentalfunction in dem früher (Abh. I, pag. 16 und 21) festgesetzten Sinne*), so können wir diese beiden einander parallel stehenden Aufgaben folgendermassen zusammenfassen:

Es sei $\left\{\begin{matrix}\Phi = \Phi(x, y) \\ \Psi = \Psi(x, y)\end{matrix}\right\}$ *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{A} \\ \mathfrak{B}\end{matrix}\right\}$, *welche am Rande***) *dieses Gebietes vorgeschriebene Werthe* $f = f(\sigma)$ *besitzt. Es soll die Beschaffenheit der Ableitungen*

$$\left\{\begin{matrix}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial \Psi}{\partial y}\end{matrix}\right\} \tag{1.}$$

in unmittelbarer Nähe des Randes einer genaueren Untersuchung unterworfen werden. Namentlich sollen, was den Charakter der gegebenen Randcurve, und den Charakter der vorgeschriebenen Randwerthe $f = f(\sigma)$ *betrifft, möglichst allgemeine Fälle angegeben werden, in denen jene Ableitungen* (1.) *bei einer Annäherung an den Rand gegen bestimmte endliche Werthe convergiren.*

Bei der Inangriffnahme dieser Aufgaben werde ich als Basis meiner Untersuchung diejenigen *analytischen Ausdrücke* benutzen, welche für die Functionen Φ und Ψ — wenigstens unter gewissen Voraussetzungen — durch die Methode des arithmetischen Mittels sich ergeben. Diese analytischen Ausdrücke besitzen [vergl. Abh. I, pag. 79 (*R.*) und pag. 28 (2.)] die Gestalt:

---

*) C. Neumann, Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, erste Abhandlung, 1887; im XIII. Bande der Abhandlungen der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.

**) Der Rand von $\mathfrak{A}$ ist identisch mit dem von $\mathfrak{B}$; vgl. pag. 3 und 4.

$$\Phi = \Phi(x, y) = (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\,\xi\, d\sigma\,,$$
$$\Psi = \Psi(x, y) = (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\,\eta\, d\sigma\,, \tag{2.}$$

oder, was dasselbe ist, folgende Gestalt:

$$\Phi = \Phi(x, y) = (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_{(x,y)}\,,$$
$$\Psi = \Psi(x, y) = (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_{(x,y)}\,, \tag{2a.}$$

die Integrationen hinerstreckt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Randcurve. Dabei soll ν die innere Normale des Elements $d\sigma$, und $T = \log\frac{1}{E}$ sein, wo E den Abstand des Elements $d\sigma$ vom Punkte (x, y) vorstellt. Ferner bezeichnen ξ und η (nicht zu verwechseln mit den Coordinaten) gewisse längs des Randes sich hinerstreckende Functionen der Bogenlänge σ, und zwar Functionen, *deren Beschaffenheit in bestimmter Weise von den jedesmal vorgeschriebenen Randwerthen f abhängt**). Was endlich die Formeln (2a.) betrifft, so bezeichnet $(d\sigma)_{(x,y)}$ die mit dem Factor ± 1 multiplicirte scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ für einen in (x, y) befindlichen Beobachter; und zwar ist jener Factor $= +1$ oder $= -1$, je nachdem dieser Beobachter die *innere* oder die *äussere* Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat.

Die Beschaffenheit der Functionen Φ, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$, etc. hängt, zufolge (2.), in erster Linie von ξ ab, während ξ seinerseits, wie soeben betont wurde, von f abhängt. Analoges ist über die Functionen Ψ, $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$, etc. zu bemerken. Dieselben hängen in erster Linie von η ab, während η seinerseits von f abhängt. Und demgemäss werden wir also diese Abhängigkeitsketten

$$\begin{cases} \Phi \text{ ——— } \xi \text{ ——— } f \\ \text{und } \Psi \text{ ——— } \eta \text{ ——— } f \end{cases} \tag{3.}$$

genauer zu untersuchen haben.

---

*) Die Buchstaben ξ, η werden in der ganzen Abhandlung in *zweierlei* Bedeutungen benutzt werden. Bald nämlich werden sie dienen zur Bezeichnung der soeben genannten von f abhängenden Functionen, bald aber auch (wie z. B. auf pag. 3) zur Bezeichnung der Coordinaten der einzelnen Curvenpunkte.

Dabei wollen wir, um die Schwierigkeiten *einzeln* zu überwinden, zuvörderst (im ersten Capitel) nur die *vorderen* Glieder dieser Ketten, d. i. die Beziehung zwischen Φ und ξ, respective zwischen Ψ und η in Betracht ziehen, um sodann erst später (im zweiten Capitel) die *ganzen* Ketten ins Auge zu fassen.

Erstes Capitel (§§ 1—10). — Benutzen wir $\mathfrak{T}$, W, λ als Collectivbezeichnungen für $\mathfrak{A}$, Φ — (Const.), ξ und $\mathfrak{Z}$, Ψ — (Const.), η, so wird unsere Aufgabe in diesem ersten Capitel, zufolge der soeben getroffenen Disposition, in der genaueren Untersuchung derjenigen Beziehung bestehen, welche durch die Formel

$$(4.) \qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi} \int \frac{dT}{d\nu} \lambda d\sigma$$

zwischen W und λ hervorgebracht wird. Hierbei erscheint es zweckmässig, *neben* dieser Formel (4.) zugleich auch folgende einfachere Formel in Betracht zu ziehen*):

$$(5.) \qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int T \lambda d\sigma \,.$$

Offenbar repräsentirt dieses V das Potential einer materiellen Belegung der Randcurve von der *Dichtigkeit* $\frac{\lambda}{\pi}$, ebenso wie W zu bezeichnen ist als das Potential einer materiellen *Doppel*-Belegung vom *Moment* $\frac{\lambda}{\pi}$.

Auf Grund der Formeln (4.), (5.) wird sich nun ergeben, dass jedwede Ableitung von V oder W — mag sie nun erster oder höherer Ordnung sein — im Allgemeinen immer darstellbar ist als die Summe zweier neuer Potentiale, von denen eines zur Gattung der V, das andere zur Gattung der W gehört. Mittelst dieses allgemeinen Satzes aber, durch welchen die Untersuchung der *Ableitungen* der Potentiale V und W auf die Untersuchung dieser Potentiale *selber* sich reducirt, werden wir zu dem Resultate gelangen, dass die Ableitungen

---

*) In der Abhandlung selber findet man f statt λ gesetzt. Hier in der Einleitung aber habe ich eine derartige Anwendung des Buchstabens f absichtlich vermieden, um einer Verwechselung mit den von Hause aus vorgeschriebenen Randwerthen f vorzubeugen.

$$\frac{\partial W}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial W}{\partial y}.$$

bei einer Annäherung an den Rand gegen bestimmte endliche Werthe convergiren, und dass diese beiden Ableitungen, die soeben genannten Convergenzwerthe miteingerechnet, zwei *Fundamentalfunctionen* des Gebietes $\mathfrak{T}$ repräsentiren, — vorausgesetzt dass λ, $\frac{d\lambda}{d\sigma}$ und $\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}$, sowie auch die Beschaffenheit der Randcurve, gewissen Voraussetzungen entsprechen, auf welche hier näher eingehen zu wollen zu weit führen würde.

Es werden also, falls man das soeben über $\mathfrak{T}$, W, λ Gesagte auf $\mathfrak{A}$, Φ, ξ und $\mathfrak{I}$, Ψ, η überträgt, die vier Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{6.}$$

am Rande gegen bestimmte endliche Werthe convergiren und, diese Convergenzwerthe miteingerechnet gedacht, vier theils zu $\mathfrak{A}$ theils zu $\mathfrak{I}$ gehörige *Fundamentalfunctionen* repräsentiren, — vorausgesetzt dass ξ, $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}$ und η, $\frac{d\eta}{d\sigma}$, $\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}$, sowie auch die Beschaffenheit der Randcurve, gewissen noch näher anzugebenden Voraussetzungen entsprechen.

Zweites Capitel. (§§ 11—15.) — Was nun ferner die *hintern* Glieder der Ketten (3.), d. i. die Beziehung zwischen ξ und f, respective zwischen η und f betrifft, so sind ξ und η durch unendliche Reihen darstellbar, deren einzelne Glieder von f abhängen. [Vgl. Abh. I, pag. 79 (Q.) und pag. 115 (Q'.)]. Mehr geeignet aber als diese Reihen selber erscheinen zur Untersuchung der genannten Beziehungen gewisse auf Grund dieser Reihen für ξ und η sich ergebende *Functionalgleichungen*. Diese letztern lauten, falls man unter s jeden beliebigen Punct der Randcurve versteht, folgendermassen:

$$\begin{aligned} \xi_s + f_s &= + (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_s , \\ \eta_s - f_s &= - (\text{Const.}) - \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_s , \end{aligned} \tag{7.}$$

wo ξ_s, η_s, f_s die Werthe von ξ, η, f im Punkte s vorstellen, während $(d\sigma)_s$ denjenigen Werth bezeichnet, welchen $(d\sigma)_{(x,y)}$ an-

nimmt, sobald man statt des Punktes (x, y) den Punkt s eintreten lässt. Auf Grund dieser Functionalgleichungen (7.) wird sich nun ergeben, dass die Beschaffenheit der Functionen

$$(8.) \qquad \xi, \frac{d\xi}{d\sigma}, \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \text{ und } \eta, \frac{d\eta}{d\sigma}, \frac{d^2\eta}{d\sigma^2}$$

wesentlich abhängt von der Beschaffenheit der Functionen f, $\frac{df}{d\sigma}$, $\frac{d^2f}{d\sigma^2}$, sowie auch von der Beschaffenheit der Randcurve.

Schliesslich werden wir sodann durch Zusammenfassung der in (6.) und (8.) angedeuteten Sätze zu folgendem Theorem gelangen [man findet dasselbe am Schluss des § 13 dieser Abh.]:

Theorem. — *Wird in Betreff der gegebenen Curve und in Betreff der vorgeschriebenen Function f vorausgesetzt dass θ, $\frac{d\theta}{d\sigma}$, $\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}$ und f, $\frac{df}{d\sigma}$ stetige Functionen von σ sind, dass ferner $\frac{d^2f}{d\sigma^2}$ eine abtheilungsweise stetige Function von σ ist, und dass überdies $\frac{d\theta}{d\sigma}$ überall $\geqq 0$ ist*), so werden die Ableitungen $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ bei einer Annäherung an den Rand gegen bestimmte endliche Werthe convergiren, und, diese Convergenzwerthe mit eingerechnet gedacht, zwei Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{A}$ repräsentiren.*

Oder ein wenig anders ausgedrückt: Es werden alsdann drei Fundamentalfunctionen Φ, Φ_1, Φ_2 des Gebietes $\mathfrak{A}$ existiren von solcher Beschaffenheit, dass Φ die vorgeschriebenen Randwerthe f besitzt, und dass überdies für jedweden Punkt innerhalb $\mathfrak{A}$, wie nahe derselbe dem Rande auch liegen mag, die Relationen stattfinden $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \Phi_1$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Phi_2$.

Desgleichen werden alsdann drei Fundamentalfunctionen Ψ, Ψ_1, Ψ_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren von solcher Beschaffenheit, dass Ψ die vorgeschriebenen Randwerthe f besitzt, und dass überdies für jedweden Punkt innerhalb $\mathfrak{J}$, wie nahe derselbe dem Rande auch liegen mag, die Relationen stattfinden: $\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi_1$ und $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \Psi_2$.

Aus diesem Theorem, welches übrigens, wenn auch weniger

---

*) θ soll die auf pag. 3 angegebene Bedeutung besitzen.

scharf, schon vor langer Zeit*) von mir ausgesprochen worden ist, ergiebt sich z. B., dass der nach der *innern* Normale ν genommene Differentialquotient $\frac{d\Psi}{d\nu}$ bei einer Annäherung an den Rand, und ebenso auch bei einer Bewegung *längs* des Randes *stetig* bleibt, immer vorausgesetzt, dass die im Theorem genannten Bedingungen erfüllt sind. Analoges ergiebt sich für $\frac{d\Phi}{d\mathsf{N}}$, wo N die *äussere* Normale vorstellen soll.

Das dritte Capitel (§§ 16—22) bezieht sich speciell auf die *Green'sche Function* und auf die *Theorie der conformen Abbildung*. Sind

$$\Theta\,,\quad \frac{d\Theta}{d\sigma}\,,\quad \frac{d^2\Theta}{d\sigma^2} \quad \textit{stetige Functionen der Bogenlänge } \sigma\,, \tag{10.}$$

ist ferner

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} \text{ überall} \geqq 0\,, \tag{11.}$$

und ist überdies irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{I}$ ein fester Punkt (a, b) gegeben, so werden zufolge des soeben ausgesprochenen Theorems drei Fundamentalfunctionen U, U_1, U_2 des Gebietes $\mathfrak{I}$ existiren, von solcher Beschaffenheit, dass erstens für jeden *Randpunkt* $U = \log\frac{1}{r}$ ist, wo r den Abstand dieses Punktes vom festen Punkte (a, b) vorstellt, und dass zweitens für jedweden Punkt *innerhalb* $\mathfrak{I}$ (wie nahe derselbe dem Rande auch liegen mag) die Relationen stattfinden

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2\,.$$

Die Function U heisst alsdann die dem Punkte (a, b) entsprechende *Green'sche Function*, und der Punkt (a, b) der *Centralpunkt* dieser Function.

Setzt man jetzt:

$$\Omega = \left(\log\frac{1}{r}\right) - U = -(U + \log r)\,, \tag{12.}$$

wo U den Werth der Function U in einem beliebigen Punkte (x, y), andererseits r den Abstand dieses Punktes (x, y) vom festen Punkte

*) In den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. von 1878, pag. 50 und 52. Vgl. auch die Math. Annal. Bd. 16, pag. 428.

(a, b) vorstellen soll, so wird Ω eine Function von (x, y) sein, welche *am Rande* von $\mathfrak{F}$ durchweg verschwindet, welche ferner *innerhalb* $\mathfrak{F}$ überall > 0, und speciell im Punkte (a, b) positiv unendlich ist.

Hieraus ergiebt sich, dass der nach der innern Normale ν genommene Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$ längs des Randes durchweg *positiv* ist. Auch lässt sich ohne grosse Mühe nachweisen, dass derselbe niemals in *sämmtlichen* Punkten eines Randelementes verschwinden kann, wie klein das Element auch sein möge. Ob aber dieser Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$ nicht vielleicht in *einzelnen* Punkten des Randes verschwinden könne, — diese Frage scheint bisher noch niemals in Angriff genommen, und überhaupt mit grossen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Das Resultat, zu dem ich in dieser Beziehung — allerdings auf sehr verwickeltem und mühsamem Wege — gelangen werde, lautet folgendermassen:

Sind die Voraussetzungen (10), (11.) *erfüllt, so wird der Differentialquotient* $\frac{d\Omega}{d\nu}$ *am Rande überall existiren, längs des Randes überall stetig sein, und zugleich auch längs des Randes überall*

(13.) $$> k$$

sein, wo k *eine positive und von* 0 *verschiedene Constante vorstellt.*

Um diese Constante k wirklich angeben zu können, bezeichne man den kleinsten Krümmungsradius der gegebenen Randcurve mit R_0, ferner den kleinsten Abstand des gegebenen Punktes (a, b) vom Rande mit $2P_0$, und verstehe sodann unter A irgend eine Constante die > 0, die überdies $< R_0$ und zugleich auch $< P_0$ ist. Sodann lasse man auf der innern Seite der Randcurve einen Kreis vom Radius A fortrollen, und denke sich diesen Kreis in jedem Augenblicke der genannten Bewegung in zwei Halbkreise zerlegt mittelst eines Durchmessers, welcher senkrecht steht zu dem nach dem augenblicklichen Berührungspunkte hinlaufendem Radius. Der dem Berührungspunkte *abgewendete* Halbkreis wird alsdann während jener rollenden Bewegung eine gewisse *ringförmige Fläche* überstreichen, die vom Rande des Gebietes $\mathfrak{F}$ überall durch einen gewissen Zwischenraum getrennt ist. Bezeichnet nun Ω_0 den kleinsten Werth von Ω in Erstreckung dieser ringförmigen Fläche, so hat jene Constante k den Werth:

$$k = \frac{\Omega_0}{33A}. \tag{14.}$$

Solches absolvirt, gehen wir über zur *Aufgabe der conformen Abbildung des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *auf einer Kreisfläche.* Es sei (x_0, y_0) irgend ein fester Punkt innerhalb $\mathfrak{J}$, und

$$V = \int_{x_0 y_0}^{xy} (U_1 dy - U_2 dx), \tag{15.}$$

wo U_1 und U_2 die schon vorhin genannten Fundamentalfunctionen sein sollen, und die Integrationscurve auf das Gebiet $\mathfrak{J}$ beschränkt sein soll. Ferner sei:

$$z = x + iy, \quad c = a + ib, \quad W = U + iV, \tag{16.}$$
$$(i = \sqrt{-1}).$$

Endlich mag unter $F(z)$ folgende Function verstanden sein:

$$F(z) = (z - c)e^W. \tag{17.}$$

Bildet man nun das in der z*-Ebene gelegene Gebiet* $\mathfrak{J}$ *mittelst der Formel*

$$w = F(z) \tag{18.}$$

auf der w*-Ebene ab, so wird das Resultat dieser Abbildung eine Kreisfläche* $\mathfrak{K}$ *sein, deren Radius* $= 1$ *ist, und deren Mittelpunkt* $w = 0$ *in Correspondenz steht zu dem gegebenen Punkte* $z = c$.

Das sind bekannte und einfache Sachen. Will man nun aber beweisen, dass diese Abbildung *wirklich conform* ist in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$, dass sie also in *jedwedem* Punkte z des Gebietes $\mathfrak{J}$, mag nun derselbe innerhalb $\mathfrak{J}$ oder am Rande von $\mathfrak{J}$ liegen, eine in den kleinsten Theilen ähnliche ist, so wird man, was z. B. den Differentialquotienten $\frac{dF(z)}{dz}$ betrifft, zu zeigen haben, dass dieser Differentialquotient überall *existirt*, sowohl in jedem Punkte innerhalb $\mathfrak{J}$ wie auch in jedem Randpunkte von $\mathfrak{J}$, ferner zu zeigen haben, dass die Entstehungsweise dieses Differentialquotienten in jedem solchen Punkte eine von allen Seiten her *äquiconvergente* ist, und endlich zu zeigen haben, dass der Werth dieses Differentialquotienten in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ (also z. B. auch am Rande) *verschieden von* 0 ist.

Ich werde nun diese Nachweise für den Fall, dass die Voraus-

setzungen (10.), (11.) *erfüllt sind, wirklich führen, wobei mir der in* (13.) *angegebene Satz wesentlich zur Stütze dient.*

Vorläufige Mittheilungen über die *Resultate* der gegenwärtigen Abhandlung sind von mir bereits erfolgt in den Sitzungsberichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. im Juni 1878 und im Mai 1888, ferner im Jahre 1880 im 16. Bande der Mathem. Annalen; wobei erwähnt sein mag, dass am letztern Orte nicht nur Sätze über das Logarithmische Potential, sondern auch die analogen Sätze über das *Newton'sche Potential im Raume* angegeben sind.

Zur besonderen Genugthuung gereicht mir das Interesse, welches Herr Beltrami für diese letzern Sätze dadurch an den Tag gelegt hat, dass er kurze Zeit nach ihrer Publication nicht nur einen *Beweis*, sondern gleichzeitig auch eine *Verallgemeinerung* derselben mittheilte. In der That hat Beltrami im Jahre 1880 im 10. Bande der *Annali di Matematica* in seinem Aufsatz: *Intorno ad alcuni nuovi Teoremi del Sig. Neumann sulle Funzioni potenziali* jene von mir für *geschlossene* Flächen aufgestellten Sätze nicht nur bewiesen, sondern auch auf den Fall *ungeschlossener* Flächen ausgedehnt.

Methoden und Resultate.

Wie wohl in allen Gebieten der Mathematik, so dürften auch hier die *Methoden* bei Weitem wichtiger sein als die augenblicklichen *Resultate*. Die Methoden aber pflegen einfacher und klarer hervorzutreten durch Beschränkung auf mehr oder weniger specielle Fälle. Demgemäss ist mein Bestreben in der vorliegenden Abhandlung vor Allem dahin gerichtet gewesen, die *Methoden* der Untersuchung in helles Licht zu stellen, — selbst auf Kosten der Allgemeinheit der zu erlangenden *Resultate*.

Aus dieser Tendenz erklärt sich die *sehr mangelhafte Ausnutzung* der von mir dargelegten Methoden. So z. B. werden wir fast stets nur Curven betrachten, die *frei* von Ecken sind, trotzdem, dass die exponirten Methoden die Durchführung der Untersuchungen meistentheils auch dann noch gestatten würden, wenn Ecken *vorhanden* sind. Ueberhaupt würde es mittelst der exponirten Methoden möglich gewesen sein, fast alle Resultate der vorliegenden Abhandlung in sehr viel grösserer Allgemeinheit zu erhalten; wie denn z. B. auch die im Jahre 1880, ohne Beweis, von mir publicirten Sätze (Math. Annal., Bd. 16) über die *hier* mitzutheilenden Sätze vielfach hinausgreifen.

Ebenso erklärt sich aus jener Tendenz der Umstand, dass in der vorliegenden Abhandlung nirgends der Versuch gemacht ist, die Voraussetzungen auf ihr geringstes Maass zu reduciren. So z. B. ist häufig der Begriff der *abtheilungsweisen Stetigkeit* angewendet, wo schon der blosse Begriff der *Integrirbarkeit* ausreichend gewesen wäre. Auch ist zuweilen kurzweg die Stetigkeit der zweiten Ableitungen vorausgesetzt, wo schon die Stetigkeit der *beiden* Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ein ausreichendes Fundament geliefert hätte.

Um eine wirklich genaue, und dabei nicht allzuschleppende Ausdrucksweise zu ermöglichen, habe ich mich genöthigt gesehen, einerseits den Begriff der *Fundamentalfunctionen* einzuführen (Abh. I, pag. 16 und 21), und andererseits auch dem Worte *Convergenzwerth* eine gewisse eigenthümliche Bedeutung beizulegen (vgl. in der vorliegenden Abhandlung die zu Anfang des § 2 gegebenen Definitionen pag. 22, 23).

Die *wirkliche Ausnutzung* der dargelegten Methoden und die Aufstellung eines abgerundeten und vollständigen Systems von Sätzen dürfte allerdings eine sich von selber aufdrängende Aufgabe sein. Aber man kann eben nicht Alles auf einmal erreichen. Vorläufig sollen hier nur die von mir entdeckten *Methoden* dargelegt werden. Später dürften wohl alsdann zu diesen Methoden noch andere nicht minder wichtige Methoden sich gesellen. Auch dürfte im Laufe der Zeit die *Ausdrucksweise* sich etwas mehr abschleifen, und dem behandelten Gegenstande sich besser accommodiren. Und dann erst dürfte es vielleicht angemessen sein, an die Construction eines nach allen Seiten hin möglichst vollständigen Systems zu denken.

Erstes Capitel.

Ueber die Potentiale V und W, namentlich über die Differentialquotienten derselben.

Die Hauptpunkte dieses Capitels bestehen in zwei Theoremen $V\alpha$. und $W\alpha$., welche die Potentiale selber betreffen, ferner in zwei Theoremen $V\beta$. und $W\beta$., welche die *ersten Differentialquotienten* derselben betreffen, endlich in zwei Theoremen $V\gamma$. und $W\gamma$., welche auf die *zweiten Differentialquotienten* der Potentiale Bezug haben. Eine übersichtliche Zusammenstellung all' dieser und noch höherer Theoreme findet man in § 9.

Uebrigens sind für die weiter folgenden Capitel dieser Abhandlung nur die vier ersten Theoreme (§§ 1—6) erforderlich. Die Aufstellung dieser vier Theoreme lässt aber eine gewisse Gesetzmässigkeit zu Tage treten, die von selber zu den Theoremen $V\gamma$. und $W\gamma$. (§ 7 und § 8), sowie auch zu noch höheren Theoremen (§ 9) hindrängt. Schliesslich ist (in § 10) eine ganz beiläufige Betrachtung hinzugefügt über *monogene* Functionen von der Form $V + iW$.

§ 1.

Ueber das Potential V. Theorem $V\alpha$.

Längs der gegebenen geschlossenen Curve sei irgend eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben. Denkt man sich nun irgendwo in der Ebene einen Punkt (x, y) markirt, und die Abstände dieses Punktes von den einzelnen Elementen $d\sigma$ der Curve mit E bezeichnet, so repräsentirt der Ausdruck*)

*) Gelegentlich dieser Formel (1.) sei noch bemerkt, dass die unter dem Integralzeichen befindlichen Bogenelemente $d\sigma$ unter allen Umständen als *positive* Grössen angesehen werden sollen.

$$(1.) \qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \left(\log \frac{1}{E}\right) f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma ,$$

in welchen T Abbreviatur ist für $\log \frac{1}{E}$, dasjenige *Potential*, welches auf den Punkt (x, y) ausgeübt wird von einer auf der Curve ausgebreiteten materiellen *Belegung* von der Dichtigkeit $\frac{f}{\pi}$. Für dieses Potential gilt folgender Satz:

Erster Satz. — *Sind*

$$(2.) \qquad \theta \text{ und } f \text{ abtheilungsweis stetige Functionen von } \sigma,$$

so wird das Potential

$$(3.) \qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma$$

eine Function von (x, y) *sein, die in der ganzen unendlichen Ebene überall stetig ist.*

Beweis. — Dass V für alle von der Curve *getrennten* Punkte stetig ist, übersieht man sofort. Und es wird also der Beweis der Stetigkeit von V nur noch für solche Punkte (x, y) zu führen sein, die *auf* der Curve liegen. Zu diesem Zwecke aber wird es ausreichend sein, dem Punkte (x, y) auf der Curve eine beliebige Lage zu geben, und sodann zu zeigen, dass die diesem Punkte *zunächst* befindlichen Curventheile zu jenem Potential V immer nur einen *verschwindend kleinen* Beitrag liefern. Oder genauer ausgedrückt:

Denkt man sich den Punkt (x, y) irgendwo auf der Curve gelegen, beschreibt man sodann um (x, y), als Centrum, einen kleinen Kreis vom Radius R, und bezeichnet man das innerhalb dieses Kreises befindliche Stück der gegebenen Curve mit γ, so wird es für den genannten Zweck ausreichend sein, zu zeigen, dass der von γ herrührende Theil $V^{(\gamma)}$ des Potentials V durch Verkleinerung von R unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar ist.

Zufolge unserer Voraussetzung (2.) ist das Azimuth θ eine abtheilungsweise stetige Function der Bogenlänge, die gegebene Curve also als ein Polygon mit einer endlichen Anzahl von Ecken anzusehen [vgl. die erste Bemerkung pag. 5]. Liegt nun, um die Vorstellung zu fixiren, der Punkt (x, y) in einer *Ecke* des Polygons, und sind a und b die beiden in dieser Ecke zusammenstossenden *Seiten* des Polygons, so wird θ stetig sein längs a, und ebenso auch

längs b. Demgemäss wird man, von jener Ecke (x, y) aus, auf a und b zwei Strecken α und β abschneiden können, die so klein sind, dass θ längs α beliebig wenig, z. B. um weniger als 60° variirt, dass mithin alle Elemente $d\alpha$ dieser Strecke α gegen die in (x, y) an α gelegte Tangente A Winkel bilden, die $< 60^\circ$ sind, und dass andererseits Analoges auch stattfindet für die Elemente $d\beta$ der Strecke β mit Bezug auf die in (x, y) an β gelegte Tangente B. Solches festgesetzt, ist also der Winkel $(d\alpha, A)$ stets $< 60^\circ$, mithin $\cos(d\alpha, A) > \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, folglich:

$$(g.) \qquad \frac{1}{\cos(d\alpha, A)} < 2 , \quad \text{und ebenso} \quad \frac{1}{\cos(d\beta, B)} < 2 ,$$

vorausgesetzt, dass man unter den hier genannten Winkeln stets die *spitzen* Winkel versteht.

Diese beiden Strecken α und β wollen wir jetzt noch weiter sich verkleinern lassen. Zu diesem Zwecke beschreiben wir um (x, y), als Centrum, einen Kreis mit einem Radius

$$(h.) \qquad R < 1 ,$$

der so klein sein soll, dass der Kreis die beiden Strecken α und β schneidet, und lassen sodann α und β auf diejenigen Stücke sich zusammenziehen, welche innerhalb dieses Kreises liegen.

Für den von α herrührenden Theil des Potentials V:

$$V^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int \left(\log \frac{1}{E} \right) f d\alpha$$

ergiebt sich alsdann die Formel:

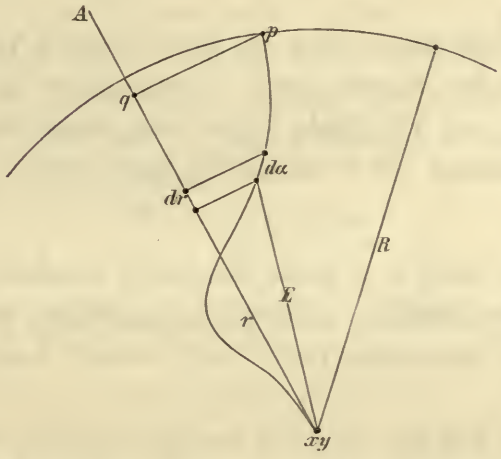
$$\text{abs } V^{(\alpha)} \leqq \frac{1}{\pi} \int \left(\log \frac{1}{E} \right) (\text{abs } f)\, d\alpha ;$$

denn es ist zu beachten, dass die $d\alpha$ alle *positiv* zu denken sind [vgl. die Note pag. 16], und ferner zu beachten, dass die $d\alpha$ alle innerhalb des Kreises (R) liegen, dass mithin die zugehörigen E durchweg $\leqq R$, also, nach $(h.)$, durchweg < 1, und dass daher die hier in Betracht kommenden $\log \frac{1}{E}$ durchweg *positiv* sind.

Die Function f ist, nach der Voraussetzung (2.), längs der gegebenen Curve abtheilungsweise stetig, mithin durchweg *endlich*. Bezeichnet man nun ihren absolut grössten Werth mit M, so folgt aus der letzten Formel sofort:

$$(j.) \qquad \text{abs } V^{(\alpha)} \leqq \frac{M}{\pi} \int \left(\log \frac{1}{E} \right) d\alpha \ .$$

Projicirt man jetzt [vgl. die Figur] die Linien E und $d\alpha$ senkrecht auf die in (x, y) an α gelegte Tangente A, und bezeichnet



man diese Projectionen mit r und dr, so ist einerseits

$$d\alpha = \frac{dr}{\cos (d\alpha, A)} \ ,$$

mithin nach $(g.)$:

$$d\alpha < 2 dr \ ,$$

und andererseits $E \geqq r$, mithin:

$$\log \frac{1}{E} \leqq \log \frac{1}{r} \ ;$$

so dass die Formel $(j.)$ übergeht in:

$$(k.) \qquad \text{abs } V^{(\alpha)} < \frac{2M}{\pi} \int_0^{\varrho} \left(\log \frac{1}{r} \right) dr \ .$$

Hier bezieht sich ϱ auf den *Endpunkt* p der Curvenstrecke α. Denkt man sich nämlich von p aus ein Perpendikel pq herabgelassen auf die Tangente A, so bezeichnet ϱ den Abstand des so erhaltenen Fusspunktes q vom Punkte (x, y).

Offenbar wird die rechte Seite der Formel $(k.)$ noch weiter vergrössert werden, falls man daselbst die Integration nicht bis $r = \varrho$, sondern bis $r = R$ ausdehnt; so dass man also *a fortiori* erhält:

(*l.*) $$\text{abs } V^{(\alpha)} < \frac{2M}{\pi}\int_0^R \left(\log\frac{1}{r}\right) dr \ ,$$

oder was dasselbe ist:

(*m.*) $$\text{abs } V^{(\alpha)} < \frac{2MR}{\pi}\left(1 + \log\frac{1}{R}\right) .$$

Hieraus aber folgt sofort, dass das abs $V^{(\alpha)}$ durch Verkleinerung von R unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar ist. Analoges gilt offenbar auch von $V^{(\beta)}$, und, wenn man beide Strecken α und β zusammengenommen mit γ bezeichnet, auch von

(*n.*) $$V^{(\gamma)} = V^{(\alpha)} + V^{(\beta)} . \qquad Q.\ e.\ d.$$

Dass man endlich zu genau demselben Resultate auch dann gelangt, wenn der Punkt (x, y) nicht in einer Ecke, sondern irgendwo anders auf der gegebenen Curve liegt, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Wenn wir nun aber auch den vorstehenden Satz wirklich bewiesen haben, also eingesehen haben, dass V in der Ebene *allenthalben stetig* ist, so bleibt doch noch fraglich, ob dieses V nicht vielleicht beim Fortgang zu unendlich fernen Punkten ins Unendliche anwachsen kann. Diese Frage findet ihre Beantwortung durch folgenden Satz:

Zweiter Satz. — *Fügt man zu den schon gemachten Voraussetzungen* (2.) *noch die hinzu, dass das über die gegebene Curve* σ *erstreckte Integral*

(4.) $$\int f d\sigma = 0$$

sein soll, so wird V *in den unendlich fernen Punkten der Ebene nicht nur endlich, sondern sogar* $= 0$ *sein.*

Oder genauer ausgedrückt: Denkt man sich irgend eine die Curve σ *umschliessende Kreisperipherie* s *vom Radius* r *construirt, so werden, falls die Voraussetzungen* (2.) *und* (4.) *erfüllt sind, alle Werthe, welche* V *ausserhalb dieser Peripherie* s *besitzt, ihrem absoluten Betrage nach, durch Vergrösserung von* r *unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein.*

Und gleichzeitig werden alsdann für jeden solchen die Curve σ *umschliessenden Kreis* s, *mag nun sein Radius* r *gross oder klein sein, die Formeln stattfinden:*

(5.) $$\int V ds = 0 \quad \text{und} \quad \int \frac{dV}{dr} ds = 0 \ ,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente ds der Peripherie s.

Beweis. — Es sei C das Centrum der Peripherie s. Markirt man nun auf der Peripherie s irgend einen Punkt (x, y), und auf der gegebenen Curve σ irgend einen Punkt (ξ, η), und bezeichnet die dem Centrum C entsprechenden Polarcoordinaten dieser Punkte respective mit (r, o) und (ϱ, ω), so dass also r den Radius von s vorstellt, — so erhält man für den gegenseitigen Abstand E dieser beiden Punkte die Entwicklung:

$$\log \frac{1}{E} = \log \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \cos n(\omega - o) .$$

Bildet man jetzt, unter Anwendung dieser Entwicklung, das Potential

$$V = \frac{1}{\pi} \int \left(\log \frac{1}{E}\right) f d\sigma$$

für jenen auf s markirten Punkt (x, y) oder (r, o), so ergiebt sich:

$$V = \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{1}{r}\right) \int f d\sigma + \frac{1}{\pi} \int \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \cos n(\omega - o)\right] f d\sigma ,$$

also mit Rücksicht auf (4.):

$$(G.) \qquad V = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A^{(n)} \frac{\cos no}{r^n} + B^{(n)} \frac{\sin no}{r^n}\right) ,$$

wo alsdann unter den $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ folgende *Constanten* [d. i. von (x, y) oder (r, o) unabhängige Grössen] zu verstehen sind:

$$(H.) \qquad A^{(n)} = \frac{1}{n\pi} \int \varrho^n (\cos n\omega) f d\sigma ,$$

$$B^{(n)} = \frac{1}{n\pi} \int \varrho^n (\sin n\omega) f d\sigma .$$

Auf Grund der Formel $(G.)$ erkennt man aber nun sofort die Richtigkeit der in unserm Satze ausgesprochenen Behauptungen.

Zusammenfassung der erhaltenen Resultate. — Bezeichnet man die gegebene Curve schlechtweg mit σ, und jedweden Punkt (x, y), jenachdem er *innerhalb* $\mathfrak{I}$, oder *auf* σ, oder *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, respective mit j oder s oder a, und erinnert man sich endlich an die Art und Weise, in welcher früher (Abh. I, pag. 16 und 21) die *Fundamentalfunctionen* der Gebiete $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$ definirt worden sind,

so gelangt man auf Grund der soeben bewiesenen beiden Sätze sofort zu folgendem Theorem:

Theorem $V\alpha$. — *Ist längs der gegebenen geschlossenen Curve σ eine bestimmte Function der Bogenlänge: $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(6.) *0 und f abtheilungsweis stetige Functionen der Bogenlänge sind,*

so wird das auf den Punkt (x, y) ausgeübte Potential

$$V = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma \tag{7.}$$

eine Function von (x, y) sein, welche in der ganzen unendlichen Ebene allenthalben stetig ist. Gleichzeitig werden alsdann die Werthe V_j und V_s zusammengenommen eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ repräsentiren.

Fügt man ferner zu den Voraussetzungen (6.) *noch die hinzu, dass*

$$\int f d\sigma = 0 \tag{8.}$$

sein soll, so wird Aehnliches auch von den Werthen V_a, V_s zu sagen sein. Denn es werden alsdann all' diese Werthe V_a und V_s zusammengenommen eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ repräsentiren.

§ 2.

Ueber das Potential W. Theorem $W\alpha$.

Ist eine Function $F = F(x, y)$ in der gegebenen Curve *unstetig*, so sind im Allgemeinen *drei* Werthsysteme zu unterscheiden: das System der F_s, das der F_a, und das der F_j. Dabei sind sämmtliche Punkte der gegebenen Curve mit s, andererseits aber alle von der Curve *getrennten* Punkte mit a oder j, und zwar die zu $\mathfrak{A}$ gehörigen mit a, die zu $\mathfrak{J}$ gehörigen mit j bezeichnet zu denken. Im Anschluss an diese Vorstellungen und Bezeichnungen wollen wir nun, um an Kürze des Ausdruckes zu gewinnen, folgende Definitionen festsetzen:

Definitionen. — *Es sei s ein bestimmter Punkt der gegebenen Curve, und o ein um s (als Centrum) beschriebener kleiner Kreis.*

Lässt sich alsdann zeigen, dass dem Punkte s eine bestimmte endliche Grösse P_s zugehört von solcher Beschaffenheit, dass alle Abweichungen, welche die innerhalb o befindlichen Werthe F_a gegenüber P_s zeigen, durch Verkleinerung von o unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind, so soll jene Grösse P_s der Convergenzwerth der Werthe F_a für den Punkt s genannt, und kurzweg mit F_{as} bezeichnet werden.

Lässt sich ferner nachweisen, dass jenem Punkte s noch eine zweite bestimmte endliche Grösse Q_s adjungirt ist, von solcher Beschaffenheit, dass alle Abweichungen, welche die innerhalb o befindlichen Werthe F_j gegenüber Q_s zeigen, durch Verkleinerung von o unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind, so soll Q_s der Convergenzwerth der Werthe F_j für den Punkt s genannt, und mit F_{js} bezeichnet werden.

Lassen sich die in Rede stehenden Nachweise bewerkstelligen für jedweden Punkt s der gegebenen Curve, so hat man längs dieser Curve im Allgemeinen dreierlei Functionen, die erste bestehend aus den direct auf der Curve selber gegebenen Werthen F_s, die zweite bestehend aus den äussern Convergenzwerthen $P_s = F_{as}$, und die dritte endlich bestehend aus den innern Convergenzwerthen $Q_s = F_{js}$.

Bemerkung. — Man wird diese Definitionen z. B. auch anwenden können auf den besonders einfachen Fall, dass die gegebene Function $F = F(x, y)$ in der ganzen unendlichen Ebene *allenthalben stetig* ist. Alsdann wird offenbar

$$F_s = F_{as} = F_{js}$$

sein. So z. B. wird für das auf pag. 22 besprochene Potential V, falls die dortigen Voraussetzungen (6.) erfüllt sind, die Formel stattfinden $V_s = V_{as} = V_{js}$.

Dies vorangeschickt, mag es mir gestattet sein, an die Untersuchungen meiner ersten Abhandlung kurz zu erinnern. Jene Untersuchungen beruhen, wie dort besonders betont worden ist [Abh. I, pag. 34] auf gewissen aus der *geometrischen Anschauung* herstammenden Elementarsätzen, welche folgendermassen lauten:

Erster Elementarsatz. — *Zerlegt man die gegebene geschlossene Curve in lauter unendlich kleine Elemente, und bezeichnet man die scheinbare Grösse eines solchen Elementes $d\sigma$ für einen im Punkte (x, y) befindlichen Beobachter mit $\pm (d\sigma)_{(x, y)}$, und zwar mit $+ (d\sigma)_{(x, y)}$ oder*

$-(d\sigma)_{(x,y)}$, *jenachdem jener Beobachter die innere oder äussere Seite des Elementes vor Augen hat, so wird das über die ganze Curve erstreckte Integral* $\int(d\sigma)_{(x,y)}$ *verschiedene Werthe haben, jenachdem der Punkt* (x, y) *zu den Punkten* a, s *oder* j *gehört. Und zwar gelten die Formeln:*

$$\int(d\sigma)_a = 0\,,$$

$$\int(d\sigma)_s = \pi(1-\vartheta_s)\,, \tag{1.}$$

$$\int(d\sigma)_j = 2\pi\,,$$

wo $\pi(1-\vartheta_s)$ *den Innenwinkel der gegebenen Curve im Punkte* s *vorstellt.*

Dabei ist in Betreff des in (1.) enthaltenen Ausdruckes

$$\int(d\sigma)_s \tag{2.}$$

und zugleich auch in Betreff des allgemeineren Ausdruckes

$$\int f(d\sigma)_s \tag{3.}$$

stets zu beachten, dass unter diesen Symbolen (2.) und (3.) nicht Integrale, sondern die *Grenzen* gewisser Integrale*) zu verstehen sind. Will man nämlich die eigentlichen Werthe dieser Symbole haben, so hat man zuvörderst die Integrationen auszuführen mit Ausschluss eines kleinen den Punkt s enthaltenden Curvenstückes, sodann aber dieses Curvenstück ins Unendliche sich verkleinern zu lassen. Entspricht nun, was wir stets voraussetzen, die gegebene Curve den festgesetzten Determinationen pag. 4, so wird das Symbol (2.) den in (1.) angegebenen Werth haben. Und ist überdies f längs der Curve *stetig*, oder wenigstens *abtheilungsweise stetig*, so wird das Symbol (3.) ebenfalls einen *bestimmten endlichen* Werth haben; wie solches mittelst des Satzes Abh. I, pag. 42 sich leicht ergiebt.

Zweiter Elementarsatz. — *Setzt man:*

$$\int d\sigma = \Sigma\,, \tag{4.}$$

*) Hierauf aufmerksam zu machen ist um so wichtiger, weil solches in Abh. I. nicht genügend hervorgehoben ist.

so besitzt das so definirte Σ *einen bestimmten endlichen Werth. Dieser Werth heisst der Umfang der gegebenen Curve.*

Dritter Elementarsatz. — *Setzt man*:

$$(5) \qquad \int \mathrm{abs}\,(d\sigma)_{(x,\,y)} = \Phi(x, y)\ ,$$

und denkt man sich dabei dieses Integral für den Fall, dass der Punkt (x, y) *auf der Curve liegt, ebenso wie vorhin das Integral* $\int (d\sigma)_s$, (2.), *berechnet, so wird die in solcher Weise definirte Function* $\Phi(x, y)$ *in der ganzen unendlichen Ebene überall endlich sein, der Art, dass ihr absoluter Werth stets* $<$ M *bleibt, wo* M *eine endliche Constante vorstellt.*

Ob diese aus der geometrischen Anschauung herstammenden Elementarsätze auch noch gültig sind für ganz nebelhaft vorschwebende Curven, z. B. für Curven mit unendlich vielen Ecken, — das dürfte eine müssige Frage sein. Ist man doch bei solch' nebelhaften Curven nicht einmal von der Länge des Curvenelements zu sprechen berechtigt, also nicht einmal befugt zur Anwendung des Zeichens $d\sigma$ und der damit verbundenen Vorstellungen!

Dass hingegen diese Elementarsätze für die vorhin (pag. 4) *determinirten Curven* denselben Grad von Strenge besitzen wie etwa der Pythagoräische Lehrsatz, bedarf keiner weitern Erläuterung. Gleiches gilt daher auch von *sämmtlichen Resultaten meiner ersten Abhandlung*. Denn all' diese Resultate sind aus jenen Elementarsätzen mit absoluter Strenge abgeleitet.

Und wir werden daher hier, wo wir uns durchweg auf jene *determinirten Curven* beschränken, von sämmtlichen Resultaten der ersten Abhandlung Gebrauch machen dürfen, ohne dass dabei irgend welche Restriction erforderlich wäre. Demgemäss werden wir z. B. die dort [Abh. I, pag. 46, 47] über den Ausdruck

$$(6.) \qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\,d\sigma$$

aufgestellten Sätze benutzen dürfen. Dieser Ausdruck, in welchem T, f, $d\sigma$ dieselben Bedeutungen haben, wie in (1.) pag. 17, und in welchem ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale bezeichnet, repräsentirt bekanntlich dasjenige *Potential*, welches auf den Punkt

(x, y) ausgeübt wird von einer auf der Curve ausgebreiteten materiellen *Doppelbelegung* vom *Momente* $\frac{f}{\pi}$. Bringen wir nun jene damals (Abh. I, pag. 46, 47) für dieses Potential W erhaltenen Sätze auf den besonderen Fall in Anwendung, dass die gegebene Curve *keine* Ecken hat, dass mithin ϑ überall *stetig* ist, so gelangen wir zu folgendem Theorem:

Theorem $W\alpha$. — *Denkt man sich längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function der Bogenlänge:* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(7.) *f und ϑ stetige Functionen der Bogenlänge σ sind, dass also die Curve z. B. frei von Ecken ist,*

*so wird das auf den Punkt (x, y) ausgeübte Potential**)

$$(8.) \qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_{(x, y)}$$

eine Function von (x, y) sein, welche in der ganzen unendlichen Ebene, mit alleiniger Ausnahme der gegebenen Curve, überall stetig ist.

Die in der Curve vorhandene Unstetigkeit hat zur Folge, dass im Ganzen dreierlei Werthsysteme zu unterscheiden sind: das System der W_a, das der W_s, und das der W_j.

Für jeden Punkt s besitzen die W_a und W_j bestimmte endliche Convergenzwerthe W_{as} und W_{js} [vgl. die Definitionen pag. 22, 23], *welche zu dem direct in s selber vorhandenem Werthe***) *W_s in der Beziehung stehen:*

$$(9.) \qquad \begin{aligned} W_{as} - W_s &= -f_s\ , \\ W_{js} - W_s &= +f_s\ ; \end{aligned}$$

woraus z. B. folgt:

$$(10.) \qquad W_{as} - W_{js} = -2f_s\ .$$

---

*) In dieser Formel (8.) bezeichnet ν die auf dem Curvenelement $d\sigma$ errichtete *innere* Normale. Ueber die Bedeutung von $(d\sigma)_{(x, y)}$ ist Näheres angegeben auf pag. 23, unten.

**) Will man diesen directen Werth W_s mittelst der aus (8.) entspringenden Formel

$$W_s = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_s$$

wirklich berechnen, so ist dabei die bei (3.) gegebene Vorschrift im Auge zu behalten.

Vor Allem ist dabei aber hervorzuheben, dass die Werthe W_a *und* W_{as} *zusammengenommen eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *bilden, dass ferner die* W_j *und* W_{js} *zusammengenommen eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *bilden, und dass endlich die* W_s *längs der gegebenen Curve stetig sind.*

Bemerkung. — Die Voraussetzungen (7.) haben keinerlei Bezug auf die Ableitungen $\frac{d\theta}{d\sigma}$ und $\frac{df}{d\sigma}$. Demgemäss wird also nicht nur die Beschaffenheit dieser Ableitungen, sondern selbst auch die *Existenz* derselben für die Gültigkeit des vorstehenden Theorems vollkommen gleichgültig sein.

Aehnliches hätte bei dem Theorem $V\alpha$. pag. 22 bemerkt werden können. Doch werden wir derartige Bemerkungen, die eigentlich doch nur besagen, dass das betreffende Theorem in *correcter* Weise von uns ausgesprochen ist, in Zukunft meistentheils ganz unterdrücken.

Mit Rücksicht auf eine *allgemeinere* Durchführung der Untersuchung (von welcher auf pag. 14 die Rede war) sei bemerkt, dass man das Theorem $W\alpha$. leicht auf den Fall ausdehnen kann, dass f und θ nicht stetige, sondern nur *abtheilungsweise stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind. Alsdann wird die gegebene Curve in einzelne Strecken zerlegbar sein, der Art, dass f und θ längs jeder *einzelnen* Strecke stetig bleiben. Auch übersieht man sofort, dass das Theorem $W\alpha$. in diesem allgemeinern Falle Wort für Wort in Gültigkeit bleibt, abgesehen von denjenigen Curvenpunkten g, durch welche jene Zerlegung der Curve markirt ist; so dass also das Verhalten der Function $W = W(x, y)$ nur noch in der Nähe dieser *Ausnahmspunkte* g einer weiteren Untersuchung bedarf. Ohne auf eine solche Untersuchung hier näher einzugehen, will ich nur mittheilen, dass das *Resultat* derselben folgendes ist:

Drei aufeinander folgende Punkte g seien mit g_1, g, g_2 bezeichnet. Ferner seien die Punkte der Curvenstrecke $g_1 g$ mit g', die der Strecke $g g_2$ mit g'', und die zugehörigen Werthe von f respective mit f' und f'' bezeichnet:

$$(11.) \qquad \underbrace{g_1 \cdots g' \cdots g}_{f'} \underbrace{\cdots g'' \cdots g_2}_{f''}$$

Andererseits aber mögen unter a und j (nach wie vor) alle von der Curve *getrennten*, theils zu $\mathfrak{A}$, theils zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Punkte verstanden sein.

Alsdann wird, falls ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad vorstellt, um g (als Centrum) stets ein Kreis o von solcher Kleinheit construirbar sein, dass für alle innerhalb o befindlichen Punkte a, j, g', g'' die Formeln gelten:

$$
\begin{aligned}
W_a &= W_g - f_g' \frac{\pi - \Delta_a'}{\pi} - f_g'' \frac{\pi - \Delta_a''}{\pi} + \Theta_1 \varepsilon \,, \\
W_j &= W_g + f_g' \frac{\pi - \Delta_j'}{\pi} + f_g'' \frac{\pi - \Delta_j''}{\pi} + \Theta_2 \varepsilon \,, \\
W_{g'} &= W_g + f_g'' \frac{\pi - \gamma}{\pi} + \Theta_3 \varepsilon \,, \\
W_{g''} &= W_g + f_g' \frac{\pi - \gamma}{\pi} + \Theta_4 \varepsilon \,,
\end{aligned}
\tag{12.}
$$

wo Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 unbekannte ächte Brüche sind.

Hier repräsentirt W_g den *direct* in g selber vorhandenen Werth*). Ferner bezeichnet γ den Innenwinkel der Curve im Punkte g. Ferner bezeichnen Δ_j' und Δ_j'' die Winkel, unter denen die gerade Linie gj im Punkte g gegen die *innern* Seiten der Curvenstrecken gg_1 und gg_2 geneigt ist; so dass also z. B. die Relation stattfindet: $\Delta_j' + \Delta_j'' = \gamma$. Endlich bezeichnen Δ_a' und Δ_a'' die Winkel, unter denen die gerade Linie ga im Punkte g gegen die *äussern* Seiten der Curvenstrecken gg_1 und gg_2 geneigt ist; so dass also die Relation stattfindet $\Delta_a' + \Delta_a'' = 2\pi - \gamma$.

Bereits in der *ersten* Abhandlung (in der dritten Bemerkung pag. 115) ist von mir hervorgehoben, dass die in jener Abhandlung über den Kreis und die Kugel aufgestellten Sätze *mangelhaft bewiesen*, trotzdem aber *correct* sind. Solches soll hier dargelegt werden.

Beweis des Satzes über den Kreis (Abh. I, pag. 96). — Längs einer Kreislinie vom Radius**) A sei eine *stetige* Function f vorgeschrieben. Ferner sei gesetzt:

$$
M = \int f d\sigma \,, \tag{\alpha.}
$$

und

$$
W = W(x, y) = \frac{1}{\pi} \int f (d\sigma)_{(x, y)} \,, \tag{\beta.}
$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der Kreislinie.

*) Es ist also dieser Werth W_g ebenso gebildet zu denken, wie vorhin der Werth W_s, vgl. die zweite Note pag. 26, und namentlich die bei (3.) pag. 24 gegebene Vorschrift.

**) Dieser Radius A ist in Abh. I, pag. 96 nicht mit A, sondern mit ϱ bezeichnet worden.

Zufolge des Theorems $W\alpha$. (pag. 26) repräsentiren alsdann die W_a, W_{as} und die W_j, W_{js} zwei respective zu $\mathfrak{A}$ und zu $\mathfrak{J}$ gehörige *Fundamentalfunctionen*. Setzt man also

$$\Phi_a = \frac{M}{2\pi A} - W_a \,,$$

$$\Psi_j = W_j - \frac{M}{2\pi A} \,, \tag{γ.}$$

so gilt Analoges auch von den Φ_a, Φ_{as} und Ψ_j, Ψ_{js}. Um den in Rede stehenden Satz (Abh. I, pag. 96) zu beweisen, wird also nur noch zu zeigen sein, dass die Φ_{as} sowohl, wie auch die Ψ_{js} identisch sind mit den vorgeschriebenen f_s.

Nun ist nach (γ.):

$$\Phi_{as} = \frac{M}{2\pi A} - W_{as} \,,$$

$$\Psi_{js} = W_{js} - \frac{M}{2\pi A} \,,$$

also mit Rücksicht auf (9.):

$$\Phi_{as} = \left(\frac{M}{2\pi A} - W_s\right) + f_s \,,$$

$$\Psi_{js} = \left(W_s - \frac{M}{2\pi A}\right) + f_s \,. \tag{δ.}$$

Was die Berechnung des aus (β.) entspringenden Ausdruckes

$$W_s = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_s \,, \quad \text{[vergl. das bei (3.) Gesagte]},$$

anbelangt, so ist:

$$(d\sigma)_s = \frac{1}{2}(d\sigma)_c = \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{A} \,,$$

wo c das Centrum, und A den Radius des Kreises vorstellen. Somit folgt:

$$W_s = \frac{1}{2\pi A}\int f d\sigma = \frac{M}{2\pi A} \,. \quad \text{[Vgl. (α.)]}$$

Demgemäss gewinnen die Formeln (δ.) die einfache Gestalt:

$$\Phi_{as} = f_s \,,$$

$$\Psi_{js} = f_s \,. \quad -\ Q.\ e.\ d.$$

Beweis des Satzes über die Kugel (Abh. I, pag. 104). — Auf einer Kugelfläche vom Radius A sei eine daselbst *stetige* Function f vorgeschrieben. Ferner sei gesetzt:

$$M = \int f d\sigma \,, \tag{A.}$$

und:

$$W = W(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_{(x, y, z)} \,, \tag{B.}$$

$$(C.) \qquad \Omega = \Omega(x, y, z) = \frac{1}{4\pi A}\left(\frac{M}{A} - \frac{M}{4\pi A^2}\int\frac{d\sigma}{E} + \int\frac{f d\sigma}{E}\right),$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Kugelfläche. Dabei soll E den Abstand des variablen Punktes (x, y, z) vom Element $d\sigma$ vorstellen; so dass also z. B. das in $(C.)$ enthaltene Glied*)

$$(D.) \qquad \frac{M}{4\pi A^2}\int\frac{d\sigma}{E} = \frac{M}{R} \text{ oder } = \frac{M}{A}$$

ist, je nachdem der Punkt (x, y, z) *ausserhalb* oder *innerhalb* der Kugelfläche liegt, vorausgesetzt dass man unter R den Centralabstand dieses Punktes versteht.

Der Ausdruck W $(B.)$ subordinirt sich dem Theorem Abh. I, pag. 47. Nach diesem Theorem repräsentiren die W_a, W_{as} und die Wj, Wjs zwei respective zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}$ gehörige *Fundamentalfunctionen*. Gleiches gilt, wie man leicht erkennt, auch von den Ω_a, Ω_{as} und den Ω_j, Ω_{js}. Setzt man also

$$(E). \qquad \begin{aligned} \Phi_a &= \Omega_a - W_a\,, \\ \Psi_j &= W_j - \Omega_j\,, \end{aligned}$$

so gilt Gleiches auch von den Φ_a, Φ_{as} und den Ψ_j, Ψ_{js}. Um den in Rede stehenden Satz (Abh. I, pag. 104) zu beweisen, ist daher nur noch zu zeigen nöthig, dass die Werthe Φ_{as} sowohl, wie auch die Ψ_{js} identisch sind mit den vorgeschriebenen Werthen f_s.

Nun folgt aus $(E.)$

$$(F.) \qquad \begin{aligned} \Phi_{as} &= \Omega_{as} - W_{as}\,, \\ \Psi_{js} &= W_{js} - \Omega_{js}\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen $(F.)$ aber sind mit Rücksicht auf die aus Abh. I, pag. 46 (24.) und (25.) entspringenden Relationen

$$(G.) \qquad \begin{aligned} W_{as} &= W_s - f_s\,, \\ W_{js} &= W_s + f_s\,, \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf die aus $(C.)$, $(D.)$ entspringende Formel:

$$(H.) \qquad \Omega_s = \Omega_{as} = \Omega_{js} = \frac{1}{4\pi A}\int\frac{f d\sigma}{E}\,,$$

auch so darstellbar:

$$(J.) \qquad \begin{aligned} \Phi_{as} &= \Omega_s - (W_s - f_s)\,, \\ \Psi_{js} &= (W_s + f_s) - \Omega_s\,. \end{aligned}$$

Das hier auftretende W_s hat nach $(B.)$ den Werth:

$$(\alpha.) \qquad W_s = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_s\,,$$

---

*) Für A und R sind in der Abh. I, pag. 104 respective die Buchstaben ϱ und gebraucht worden.

wobei das früher bei (3.) Gesagte zu beachten ist. Nun ist:

$$(\beta.) \qquad (d\sigma)_s = \frac{\cos\delta \,.\, d\sigma}{E^2} = \frac{d\sigma}{2AE},$$

wo E den Abstand des Punktes s vom Elemente $d\sigma$, also eine gewisse *Sehne* der Kugelfläche vorstellt, während δ den Winkel dieser Sehne E gegen die in $d\sigma$ errichtete innere Normale bezeichnet. Denkt man sich nämlich über der Sehne E, als Grundlinie, ein gleichschenkliges Dreieck construirt, dessen Spitze im Kugelcentrum liegt, so repräsentirt δ den gemeinschaftlichen Werth derjenigen beiden Innenwinkel dieses Dreiecks, welche der Grundlinie E anliegen; so dass also z. B. die Relation stattfindet: $2A\cos\delta = E$. Durch diese Relation aber geht der *zweite* Theil der Formel ($\beta.$) in den *dritten* über.

Aus ($\alpha.$) und ($\beta.$) folgt sofort:

$$(\gamma.) \qquad W_s = \frac{1}{4\pi A}\int \frac{f\,d\sigma}{E},$$

also mit Rückblick auf ($H.$):

$$(\delta.) \qquad W_s = \Omega_s;$$

so dass also die Formeln ($J.$) folgende Gestalt gewinnen:

$$(K.) \qquad \begin{aligned} \Phi_{as} &= f_s, \\ \Psi_{js} &= f_s \,. \end{aligned} \qquad -\ Q.\ e.\ d.$$

§ 3.

Die ersten Ableitungen des Potentials V. Theorem $V\beta$.

In der Formel

$$(1.) \qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f\,d\sigma$$

hat T die Bedeutung:

$$(2.) \qquad T = \log\frac{1}{E} = -\frac{1}{2}\log\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right],$$

wo ξ, η die Coordinaten des Elementes $d\sigma$ vorstellen. Bei der gegenwärtigen Untersuchung des Potentials V mag nun vorausgesetzt werden, dass

(3.) θ, f *stetige*, und θ', f' *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind. Alsdann sind offenbar*) ξ', η' *stetige*, und ξ'', η'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ.

---

*) Man erkennt nämlich solches mittelst der Formeln (C.) pag. 3: $\xi' = \cos\theta$, $\eta' = \sin\theta$; aus denen sofort folgt $\xi'' = -\theta'\sin\theta$, $\eta'' = \theta'\cos\theta$.

Für einen von der Curve *getrennten* Punkt (x, y) ergeben sich aus (1.) und mit Rücksicht auf (2.) sofort die Formeln:

$$(4.)\quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial T}{\partial x} f d\sigma = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial T}{\partial \xi} f d\sigma, \quad (!) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial T}{\partial y} f d\sigma = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial T}{\partial \eta} f d\sigma, \quad (!) \end{aligned}$$

wo die Ausrufungszeichen andeuten sollen, dass diese Formeln nur so lange gültig sind, als der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt* bleibt. Auch erkennt man sofort, dass die Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ *stetige* Functionen von (x, y) sind, — immer vorausgesetzt, dass der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt* bleibt. Fraglich hingegen erscheint das Verhalten der Functionen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ für den Fall, dass der Punkt (x, y) der gegebenen Curve sich ins Unendliche nähert. Um hierauf genauer einzugehen, wollen wir zuvörderst die Formeln (4.) einer gewissen Transformation unterwerfen.

Differenzirt man den Ausdruck T (2.) nach der Bogenlänge σ des Punktes (ξ, η), und nach der in diesem Punkte errichteten *innern* Normale ν, so erhält man:

$$(5.)\quad \begin{aligned} \frac{dT}{d\sigma} &= \frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\sigma}, \\ \frac{dT}{d\nu} &= \frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\nu} + \frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\nu}, \end{aligned}$$

Formeln, welche mit Rücksicht auf die Relationen (C.) pag. 3:

$$(6.)\quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\nu} &= \mathsf{A} = -\sin\theta = -\eta', \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \mathsf{B} = +\cos\theta = +\xi', \end{aligned}$$

auch so darstellbar sind:

$$(7.)\quad \begin{aligned} \frac{dT}{d\sigma} &= +\frac{\partial T}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\eta', & +f\xi' d\sigma \\ \frac{dT}{d\nu} &= -\frac{\partial T}{\partial \xi}\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\xi'. & -f\eta' d\sigma \end{aligned}$$

Hieraus aber folgt durch Multiplication mit den beigesetzten Factoren und Addition und mit Rücksicht auf die aus (6.) entspringende Relation $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$, sofort:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} f d\sigma = \left(\frac{dT}{d\sigma} f\xi' - \frac{dT}{d\nu} f\eta'\right) d\sigma ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(8.) \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} f d\sigma = \left(\frac{d(Tf\xi')}{d\sigma} - T\,\frac{d(f\xi')}{d\sigma} - \frac{dT}{d\nu}(f\eta')\right) d\sigma .$$

Nun ist, nach (3.), $Tf\xi'$ eine *stetige* und $\frac{d(Tf\xi')}{d\sigma}$ eine *abtheilungsweis stetige* Function der Bogenlänge. Integrirt man daher die Formel (8.) über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Curve, so wird hierbei das Glied $\frac{d(Tf\xi')}{d\sigma} d\sigma$ verschwinden; mithin die erste der folgenden beiden Gleichungen entstehen:

$$(9.) \qquad \begin{aligned} \int \frac{\partial T}{\partial \xi} f d\sigma &= -\int T\,\frac{d(f\xi')}{d\sigma}\, d\sigma - \int \frac{dT}{d\nu}(f\eta') d\sigma , \\ \int \frac{\partial T}{\partial \eta} f d\sigma &= -\int T\,\frac{d(f\eta')}{d\sigma}\, d\sigma + \int \frac{dT}{d\nu}(f\xi') d\sigma . \end{aligned}$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen ergiebt sich in analoger Weise, nämlich ebenfalls durch Combination der beiden Formeln (7.), unter Anwendung der Factoren $f\eta' d\sigma$ und $f\xi' d\sigma$.

All' diese Gleichungen (7.), (8.), (9.) sind unanfechtbar, falls man nur annimmt, dass der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt* ist. Substituirt man nun die unter dieser Annahme erhaltenen Werthe (9.) in den unter derselben Annahme erhaltenen Formeln (4.), so ergiebt sich:

$$(10.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \overbrace{\frac{1}{\pi}\int T(f\xi')' d\sigma}^{\mathfrak{V}} + \overbrace{\frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f\eta') d\sigma}^{\mathfrak{W}} , \quad (!) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\eta')' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-f\xi') d\sigma , \quad (!) \end{aligned}$$

wo z. B. $(f\xi')'$ die Ableitung von $(f\xi')$ nach der Bogenlänge σ vorstellt, und wo $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ als Abbreviaturen dienen sollen für die beiden Integrale erster Zeile.

Nach Ausführung dieser Transformationen wollen wir jetzt das Verhalten der beiden Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial V}{\partial y}$ *für den Fall untersuchen, dass der Punkt* (x, y) *von Innen oder von Aussen her der gegebenen Curve sich ins Unendliche nähert.*

Zufolge der Voraussetzungen (3.) sind die Producte $(f\xi')$ und $(f\eta')$ *stetige*, und die Ableitungen $(f\xi')'$ und $(f\eta')'$ *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge; so dass man also mit Bezug auf die in (10.) vorhandenen Integrale $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ folgende Notizen machen kann:

mit Bezug auf $\mathfrak{V}$.	mit Bezug auf $\mathfrak{W}$.
$(f\xi')'$ ist eine *abtheilungsweis stetige* Function der Bogenlänge, und $\int (f\xi')' d\sigma$ ist $= 0$.	$(f\eta')$ ist eine *stetige* Function der Bogenlänge.

Demgemäss subordinirt sich das Integral $\mathfrak{V}$ ohne Weiteres dem Theorem *Vα.* pag. 22, und das Integral $\mathfrak{W}$ dem Theorem *Wα.* pag. 26.

Aus dem Theorem *Wα.* folgt, dass die Werthe $\mathfrak{W}_a$ und $\mathfrak{W}_j$ für jedweden auf der Curve gelegenen Punkt s *bestimmte endliche Convergenzwerthe* besitzen [vgl. die Definitionen pag. 22, 23], und dass zwischen diesen Convergenzwerthen — sie mögen $\mathfrak{W}_{as}$ und $\mathfrak{W}_{js}$ heissen — die Relation stattfindet:

$$\mathfrak{W}_{as} - \mathfrak{W}_{js} = -2 f_s \eta_s' \,. \tag{11.}$$

Sodann ergiebt sich weiter aus jenem Theorem *Wα.*, dass alle Werthe $\mathfrak{W}_a$ und $\mathfrak{W}_{as}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, und andrerseits alle $\mathfrak{W}_j$ und $\mathfrak{W}_{js}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ bilden.

Andererseits folgt aus dem Theorem *Vα.*, dass $\mathfrak{V}$ eine Function von (x, y) ist, welche in der ganzen unendlichen Ebene *allenthalben stetig* bleibt, dass mithin für diese Function $\mathfrak{V}$ [vgl. die Bemerkung pag. 23] die Gleichungen stattfinden: $\mathfrak{V}_{as} = \mathfrak{V}_{js} = \mathfrak{V}_s$; so dass man also schreiben kann:

$$\mathfrak{V}_{as} - \mathfrak{V}_{js} = 0 \,. \tag{12.}$$

Sodann ergiebt sich weiter aus jenem Theorem *Vα.*, dass alle Werthe $\mathfrak{V}_a$ und $\mathfrak{V}_{as}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, und andererseits alle $\mathfrak{V}_j$ und $\mathfrak{V}_{js}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ bilden.

Diese Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ übertragen sich nun, mittelst der Formel (10.):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{V} + \mathfrak{W}\,, \quad (!) \tag{13.}$$

sofort auf die Function $\frac{\partial V}{\partial x}$. Diese Formel sagt z. B. aus*), dass die beiden Functionen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $(\mathfrak{V} + \mathfrak{W})$ für jedweden Punkt a, wie nahe derselbe der gegebenen Curve auch liegen mag, unter einander *identisch* sind, und dass folglich diese beiden dem Gebiet $\mathfrak{A}$ entsprechenden Functionen für jeden Curvenpunkt *s ein und denselben* Convergenzwerth besitzen. Demgemäss erhalten wir die Formeln

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a &= \mathfrak{V}_a + \mathfrak{W}_a\,, \quad (!) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} &= \mathfrak{V}_{as} + \mathfrak{W}_{as}\,, \end{aligned} \tag{14.}$$

und ebenso auch folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_j &= \mathfrak{V}_j + \mathfrak{W}_j\,, \quad (!) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} &= \mathfrak{V}_{js} + \mathfrak{W}_{js}\,; \end{aligned} \tag{15.}$$

woraus mit Hinblick auf (11.), (12.) sich ergiebt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} = -2 f_s \eta_s'\,. \tag{16.}$$

Da nun die Werthe $(\mathfrak{V}_a + \mathfrak{W}_a)$ und $(\mathfrak{V}_{as} + \mathfrak{W}_{as})$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ bilden, so gilt, zufolge (14.), Gleiches auch von den Werthen $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as}$. Ebenso ergiebt sich aus (15.), dass die Werthe $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_j$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ repräsentiren.

Zu analogen Resultaten wird man offenbar, auf Grund der *zweiten* der beiden Gleichungen (10.), für $\frac{\partial V}{\partial y}$ gelangen; so dass man also, Alles zusammengefasst, folgendes Theorem erhält:

*) Man beachte dabei das der Formel beigefügte *Ausrufungszeichen*, welches hier und ebenso in allen späteren Formeln beständig andeuten soll, dass die betreffende Formel Gültigkeit besitzt für jedweden (durch einen wenn auch noch so kleinen Zwischenraum) von der Curve *getrennten* Punkt.

Theorem $V\beta$. — *Denkt man sich längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(17.) *0, f stetige, und $0'$, f' abtheilungsweis stetige Functionen der Bogenlänge sind,*

so sind die ersten Ableitungen des Potentials

$$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma \tag{18.}$$

in jedem Punkte (x, y), der von der Curve getrennt ist, darstellbar durch die Formeln

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\xi')' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f\eta')d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\eta')' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-f\xi')d\sigma\,, \quad (!)\end{aligned} \tag{19.}$$

wo die Ausrufungszeichen andeuten sollen, dass diese Formeln nur für solche Punkte (x, y) Gültigkeit haben, die von der Curve getrennt sind.

Aus diesen Formeln ergiebt sich), dass die vier Functionen*

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_j,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_j \tag{20.}$$

*für jedweden Punkt s bestimmte endliche Convergenzwerthe**) besitzen, und dass zwischen diesen Convergenzwerthen — sie mögen*

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as},\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{as} \text{ und } \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js},\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{js} \tag{21.}$$

genannt werden — folgende Beziehungen stattfinden:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} &= -2 f_s \eta_s'\,,\\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{js} &= +2 f_s \xi_s'\,.\end{aligned} \tag{22.}$$

Als besonders wichtig ist hervorzuheben, dass die vier Functionen (20.), *inclusive ihrer Convergenzwerthe* (21.), *vier Fundamentalfunctionen repräsentiren, die theils dem Gebiete $\mathfrak{A}$, theils dem Gebiete $\mathfrak{J}$*

---

*) Wie nämlich solches im Vorhergehenden dargethan ist.

**) Vgl. die Definitionen pag. 22, 23.

angehören. So z. B. repräsentiren die Werthe $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a$, *inclusive der* $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as}$, *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$. *U. s. f.*

Bemerkung. — Denkt man sich in irgend einem Curvenpunkte s die positive Tangente τ und die innere Normale ν construirt, und legt man sodann der Betrachtung dasjenige Coordinatensystem zu Grunde, dessen x-Axe mit τ, und dessen y-Axe mit ν zusammenfällt, so werden die allgemeinen Relationen (*C.*) pag. 3:

$$\xi' = \cos\theta \quad \text{und} \quad \eta' = \sin\theta$$

für jenen speciellen Punkt s die Gestalt annehmen:

$$\xi_s' = 1 \quad \text{und} \quad \eta_s' = 0\ ;$$

denn das Azimuth θ ist für jenen Punkt s offenbar $= 0$.

Demgemäss gewinnen die Relationen (22.) speciell für den Punkt s folgende Gestalt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} = 0\ , \qquad \text{d. i.} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{js} = 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{js} = 2f_s\ , \qquad \text{d. i.} \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{js} = 2f_s\ .$$

Die letzte dieser beiden Formeln repräsentirt den bekannten *Laplace'schen Satz*, oder vielmehr das Analogon dieses Satzes für die Theorie des Logarithmischen Potentials.

§ 4.

Die ersten Ableitungen des Potentials W. Theorem $W\beta$.

Der in der Formel

$$(1.) \qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int Q f\, d\sigma$$

enthaltene Ausdruck Q hat die Bedeutung:

$$(2.) \qquad Q = \frac{dT}{d\nu} = \frac{\partial T}{\partial \xi}\mathsf{A} + \frac{\partial T}{\partial \eta}\mathsf{B}\ ,$$

woraus mit Rücksicht auf (*C.*) pag. 3 sich ergiebt:

$$(3.) \qquad Q = \frac{dT}{d\nu} = -\frac{\partial T}{\partial \xi}\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\xi'\ .$$

Dabei ist:

$$(4.) \qquad T = \log\frac{1}{E} = -\frac{1}{2}\log\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\ ,$$

wo ξ, η die Coordinaten des Elementes $d\sigma$ vorstellen. Aus (3.) und (4.) folgt z. B.:

$$\text{(5.)} \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial \xi}, \text{ und } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial \xi}.$$

Bei der gegenwärtigen Untersuchung über das Potential W mag nun vorausgesetzt sein, dass

(6.) θ, f, f' *stetige*, und θ', f'' *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind. Alsdann sind offenbar*) ξ', η' *stetige*, und ξ'', η'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ.

Für einen von der Curve *getrennten* Punkt (x, y) ergiebt sich aus (1.), und mit Rücksicht auf (5.), sofort die Formel:

$$\text{(7.)} \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial Q}{\partial x} f\, d\sigma = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial Q}{\partial \xi} f\, d\sigma. \quad (!)$$

Auch erkennt man sofort, dass $\frac{\partial W}{\partial x}$ eine *stetige* Function von (x, y) ist, — immer vorausgesetzt, dass der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt bleibt.* Um nun das Verhalten dieser Function für den Fall, dass der Punkt (x, y) der Curve sich ins Unendliche nähert, zu untersuchen, wollen wir zunächst die Formel (7.) einer gewissen Transformation unterwerfen.

Differenzirt man den von x, y, ξ, η, ξ', η' abhängenden Ausdruck Q (3.) nach der Bogenlänge σ des Punktes (ξ, η), so folgt:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial Q}{\partial \xi'}\xi'' + \frac{\partial Q}{\partial \eta'}\eta'',$$

oder, weil, nach (3.), $\frac{\partial Q}{\partial \xi'} = \frac{\partial T}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial Q}{\partial \eta'} = -\frac{\partial T}{\partial \xi}$ ist:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\xi'' - \frac{\partial T}{\partial \xi}\eta''.$$

Diese Formel aber gewinnt mit Hinblick auf die aus den Gleichungen (*C.*) pag. 3:

$$(\alpha.) \qquad \begin{cases} \xi' = \cos\theta \\ \eta' = \sin\theta \end{cases},$$

entspringenden Relationen

*) Man vgl. die Note pag. 31.

$$(\beta.) \qquad \begin{cases} \xi'' = -\theta' \sin\theta\,, \\ \eta'' = +\theta' \cos\theta\,, \end{cases} \quad \text{d. i.} \quad \begin{cases} \xi'' = -\theta'\,\eta'\,, \\ \eta'' = +\theta'\,\xi'\,, \end{cases}$$

folgende Gestalt:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\,\xi' + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\,\eta'\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\,\eta' + \frac{\partial T}{\partial \xi}\,\xi'\right)\theta'\,,$$

oder, einfacher geschrieben, folgende Gestalt:

$$(8.) \qquad \frac{dQ}{d\sigma} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\,\xi' + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\,\eta'\right) - \frac{dT}{d\sigma}\,\theta'\,.$$

Andererseits ergiebt sich aus der Formel:

$$\frac{dT}{d\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \xi}\,\xi' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\eta'$$

durch nochmalige Differentiation nach σ:

$$\frac{d^2T}{d\sigma^2} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\,\xi'^2 + 2\,\frac{\partial^2 T}{\partial \xi\,\partial \eta}\,\xi'\,\eta' + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\,\eta'^2\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\,\xi'' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\eta''\right),$$

wofür man, auf Grund der bekannten Gleichung $\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = 0$, und mit Rücksicht auf die Relationen ($\beta.$), auch schreiben kann:

$$\frac{d^2T}{d\sigma^2} = \left(-\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\,\xi'^2 + 2\,\frac{\partial^2 T}{\partial \xi\,\partial \eta}\,\xi'\,\eta' - \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\,\eta'^2\right) + \left(-\frac{\partial T}{\partial \xi}\,\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\xi'\right)\theta'\,.$$

Und diese Formel endlich ist, mit Rücksicht auf die aus (3.) entspringenden Gleichungen:

$$Q = -\frac{\partial T}{\partial \xi}\,\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\xi'\,,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\,\eta' + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi\,\partial \eta}\,\xi'\,,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = -\frac{\partial^2 T}{\partial \xi\,\partial \eta}\,\eta' + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\,\xi'\,,$$

offenbar auch so darstellbar:

$$(9.) \qquad \frac{d^2T}{d\sigma^2} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\,\eta' - \frac{\partial Q}{\partial \eta}\,\xi'\right) + Q\theta'\,.$$

Multiplicirt man jetzt die beiden Formeln (8), (9.) einmal mit den Factoren ξ', η', das andere Mal mit den Factoren η', $-\xi'$, und addirt jedesmal, so erhält man, mit Rücksicht auf die aus ($\alpha.$) entspringende Relation $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \left(\frac{dQ}{d\sigma} + \frac{dT}{d\sigma}\theta'\right)\xi' + \left(\frac{d^2T}{d\sigma^2} - Q\theta'\right)\eta' ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \left(\frac{dQ}{d\sigma} + \frac{dT}{d\sigma}\theta'\right)\eta' - \left(\frac{d^2T}{d\sigma^2} - Q\theta'\right)\xi' ,$$

oder, falls man die Differentiationen nach der Bogenlänge σ *durchweg* durch Accente andeutet, und zugleich die Relationen (β.) beachtet:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = Q'\xi' + T'\eta'' + T''\eta' + Q\xi'' ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = Q'\eta' - T'\xi'' - T''\xi' + Q\eta'' ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = (Q\xi' + T'\eta')' ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = (Q\eta' - T'\xi')' .$$

Hieraus folgt sofort:

$$f\frac{\partial Q}{\partial \xi} = [f(Q\xi' + T'\eta')]' - f'(Q\xi' + T'\eta') ,$$

$$f\frac{\partial Q}{\partial \eta} = [f(Q\eta' - T'\xi')]' - f'(Q\eta' - T'\xi') ,$$

oder, falls man, was die *letzten* Terme betrifft, die identischen Gleichungen:

$$T'f'\eta' = (Tf'\eta')' - T(f'\eta')' ,$$

$$T'f'\xi' = (Tf'\xi')' - T(f'\xi')'$$

benutzt:

$$(10.) \qquad f\frac{\partial Q}{\partial \xi} = [f(Q\xi' + T'\eta') - Tf'\eta']' + T(f'\eta')' - Qf'\xi' ,$$

$$f\frac{\partial Q}{\partial \eta} = [f(Q\eta' - T'\xi') + Tf'\xi']' - T(f'\xi')' - Qf'\eta' .$$

Zufolge der Voraussetzungen (6.) sind die hier in den eckigen Klammern [ ] enthaltenen Grössen *stetige* Functionen der Bogenlänge, und die Ableitungen derselben nach σ, d. i. die Grössen [ ]', *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge. Substituirt man daher die Werthe (10.) in der in (7.) für $\frac{\partial W}{\partial x}$ aufgestellten Formel und in der analogen für $\frac{\partial W}{\partial y}$ geltenden Formel, so erhält man sofort:

$$(11.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \overbrace{\frac{1}{\pi}\int T(-f'\eta')'\,d\sigma}^{\mathfrak{V}} + \overbrace{\frac{1}{\pi}\int Q(f'\xi')\,d\sigma}^{\mathfrak{W}}, \quad (!)\\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f'\xi')'\,d\sigma \qquad + \frac{1}{\pi}\int Q(f'\eta')\,d\sigma, \quad (!) \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ als Abbreviaturen dienen sollen für die beiden Integrale erster Zeile.

Nun sind, zufolge der Voraussetzungen (6.), $(f'\xi')$ und $(f'\eta')$ *stetige*, und andererseits $(f'\xi')'$ und $(f'\eta')'$ *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge; so dass also in Betreff der Integrale $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ folgende Notizen zu machen sind:

mit Bezug auf $\mathfrak{V}$.	mit Bezug auf $\mathfrak{W}$.
$(-f'\eta')'$ ist eine *abtheilungsweis stetige* Function der Bogenlänge, und $\int(-f'\eta')'\,d\sigma$ ist $= 0$.	$(f'\xi')$ ist eine *stetige* Function der Bogenlänge.

Demgemäss subordiniren sich die Integrale $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ ohne Weiteres den Theoremen $V\alpha$. und $W\alpha$. (pag. 22 und 26). Man kann daher die im vorhergehenden Paragraph angestellten Ueberlegungen hier Schritt für Schritt von Neuem wiederholen, und gelangt so z. B. zu der Einsicht, dass die Werthe $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_j$ für jedweden Punkt s *bestimmte endliche Convergenzwerthe* $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as}$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js}$ besitzen, zwischen denen die Relation stattfindet:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js} = -2 f_s' \xi_s' .$$

Analoges ergiebt sich sodann, was die *zweite* der Formeln (11.) anbelangt, für $\frac{\partial W}{\partial y}$; so dass man, Alles zusammengefasst, zu folgendem Theorem gelangt:

Theorem $W\beta$. — *Denkt man sich längs der gegebenen geschlossenen Curve irgend eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(12.) *θ, f, f' stetige, und θ', f'' abtheilungsweis stetige Functionen der Bogenlänge sind,*

so sind die ersten Ableitungen des Potentials

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma \tag{13.}$$

in jedwedem von der Curve getrennten Punkte (x, y) folgendermassen darstellbar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(-f'\eta')'\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\xi')\, d\sigma\,, \quad (!) \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f'\xi')'\, d\sigma \quad + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\eta')\, d\sigma\,. \quad (!) \end{aligned} \tag{14.}$$

Auf Grund dieser Formeln ergiebt sich), dass die vier Functionen*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a,\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_j,\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_j \tag{15.}$$

*für jedweden Punkt s bestimmte endliche Convergenzwerthe**) besitzen:*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as},\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} \text{ und } \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js},\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{js}, \tag{16.}$$

und dass zwischen diesen Convergenzwerthen die Relationen stattfinden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js} &= -2f_s'\xi_s'\,, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{js} &= -2f_s'\eta_s'\,. \end{aligned} \tag{17.}$$

Sodann aber ist als ganz besonders wichtig hervorzuheben, dass jene vier Functionen (15.), *inclusive ihrer Convergenzwerthe* (16.), *vier Fundamentalfunctionen repräsentiren, die theils dem Gebiete* $\mathfrak{A}$, *theils dem Gebiete* $\mathfrak{S}$ *angehören.*

Bemerkung. — Lässt man, ebenso wie früher [vgl. die Bemerkung pag. 37] die x-Axe mit τ, die y-Axe mit ν zusammenfallen, und bezeichnet man den Ausgangspunkt der beiden Linien τ und ν mit s, so werden, ebenso wie damals, die Formeln stattfinden:

$$\xi_s' = 1 \quad \text{und} \quad \eta_s' = 0\,;$$

wodurch die Relationen (17.) die Gestalt gewinnen:

---

*) Wie nämlich solches im Vorhergehenden erläutert worden ist.

**) Vgl. die Definitionen pag. 22, 23.

$$(A.) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js} = -2f_s' \ ,$$

$$(B.) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{js} = 0 \ .$$

Die Formel (*A.*) steht in vollem Einklang mit der Formel (10.) pag. 26. Andererseits enthält die Formel (*B.*) den wichtigen Satz, *dass der Differentialquotient des Potentiales W nach der Normale bei einem Durchgange durch die gegebene Curve in stetiger Weise sich ändert.*

Zweite Bemerkung. — Es sei s ein bestimmter Punkt der gegebenen Curve, und ebenso wie bisher:

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma \ .$$

Alsdann wird offenbar die Stetigkeit resp. Unstetigkeit von W, $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ *in unmittelbarer Nähe des Punktes s* nur von derjenigen Beschaffenheit abhängen, welche die vorgeschriebene Function f, sowie auch die gegebene Curve selber, *in unmittelbarer Nähe von s* besitzen. Demgemäss ergiebt sich auf Grund der Thoreme $W\alpha$. pag. 26 und $W\beta$. pag. 41 folgender Satz:

Erster Satz. — Es seien θ und f stetige Functionen der Bogenlänge σ; so dass also das Integral

$$(\alpha.) \qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_{(x,\, y)}$$

unter allen Umständen einen bestimmten endlichen Werth besitzt.

Denkt man sich nun auf der gegebenen Curve irgend einen bestimmten Punkt s markirt, so werden W, und namentlich auch

$$(\beta.) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} \ \text{und} \ \frac{\partial W}{\partial y}$$

bei einer Annäherung an diesen Punkt s gegen bestimmte endliche Werthe convergiren, falls nur innerhalb eines den Punkt s einschliessenden beliebig kleinen Curvenintervalls f' stetig, und θ' und f'' abtheilungsweise stetig sind.

Dieser Satz ist ohne Weiteres anwendbar auf die Fundamentalfunctionen einer *Kreisfläche* [Abh. I., pag. 96], und führt alsdann zu folgendem Resultate:

Zweiter Satz. — Am Rande einer gegebenen Kreisfläche seien irgend welche daselbst stetige Werthe $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben; so dass also die diesen Werthen f entsprechende Fundamentalfunction Ψ der Kreisfläche in jedwedem Punkte (x, y) innerhalb dieser Fläche darstellbar ist durch die Formel [Abh. I., pag. 96 (18.)]:

$$(\gamma.) \qquad \Psi = \Psi(x, y) = \text{Const.} + \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_{(x,\, y)} \ .$$

Markirt man alsdann irgend einen Randpunkt s, so werden Ψ *und namentlich auch*

$$(\delta.) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

bei einer Annäherung an diesen Punkt s gegen bestimmte endliche Werthe convergiren, falls nur innerhalb eines den Punkt s einschliessenden beliebig kleinen Randintervalls f' *stetig, und* f'' *abtheilungsweise stetig ist.*

Diese die Kreisfläche betreffenden Dinge sind übrigens von P. DU BOIS-REYMOND in einem kürzlich erschienenen Aufsatz (Crelle's J., Bd. 103, pag. 221) einer etwas *tiefer* gehenden Untersuchung unterworfen worden, — wenigstens insoweit, als es sich um die Ableitung von Ψ nach der *Normale* ν des Randes handelt. Das Resultat, zu welchem der genannte Autor gelangt, ist folgendes:

Man bezeichne die Bogenlänge des gegebenen Punktes s mit σ, und verstehe unter $\lambda(t)$ eine monoton mit t verschwindende Function von solcher Beschaffenheit, dass der Quotient

$$\frac{f(\sigma + t) + f(\sigma - t) - 2f(\sigma)}{\lambda(t)}$$

bei abnehmendem t unter einer endlichen Schranke bleibt, und einmal aufhört Null zu werden. Oder genauer ausgedrückt: Man beschränke sich auf solche Fälle, in denen eine Function $\lambda(t)$ von der soeben genannten Beschaffenheit wirklich existirt. Alsdann wird die nach der Normale ν des Punktes s gebildete Ableitung

$$\frac{d\Psi}{d\nu},$$

bei einer Annäherung an den Punkt s, convergiren oder divergiren, je nachdem das Integral

$$\int_0^a \frac{\lambda(t)\,dt}{t^2}$$

convergent oder divergent ist. Dabei bezeichnet a eine positive Constante von beliebiger Kleinheit.

§ 5.

Allgemeine Betrachtungen über die höheren Ableitungen der Potentiale V und W.

Benutzt man P als Collectivbezeichnung für die beiden Potentiale V und W, so ist nach den Theoremen $V\beta$. (pag. 36) und $W\beta$. (pag. 41):

$$(1.) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \mathfrak{V} + \mathfrak{W}, \quad (!)$$

wo $\mathfrak{V}$ das Potential einer gewissen *einfachen Belegung*, andererseits

$\mathfrak{W}$ das Potential einer gewissen *Doppelbelegung* vorstellt. Hieraus folgt sofort:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} . \quad (!)$$

Nun ergiebt sich aber, falls man jene Theoreme $V\beta.$ und $W\beta.$ abermals, und zwar diesmal auf $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ in Anwendung bringt:

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} = \mathfrak{V}' + \mathfrak{W}' , \quad (!)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} = \mathfrak{V}'' + \mathfrak{W}'' , \quad (!)$$

wo wiederum $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}''$ die Potentiale gewisser *einfacher Belegungen*, und $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ die Potentiale gewisser *Doppelbelegungen* vorstellen. Somit folgt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (\mathfrak{V}' + \mathfrak{V}'') + (\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'') , \quad (!)$$

oder kürzer geschrieben:

(2.) $$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \mathfrak{v} + \mathfrak{w} , \quad (!)$$

wo alsdann $\mathfrak{v} = \mathfrak{V}' + \mathfrak{V}''$ das Potential einer gewissen *einfachen Belegung*, und $\mathfrak{w} = \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}''$ das Potential einer gewissen *Doppelbelegung* vorstellt.

Ebenso wie wir hier, mittelst der Theoreme $V\beta.$, $W\beta.$, von (1.) zu (2.) gelangt sind, ebenso werden wir offenbar, mittelst derselben beiden Theoreme, von (2.) aus zu folgender Formel gelangen können:

(3.) $$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{w}' , \quad (!)$$

und sodann von hier aus zu folgender:

(4.) $$\frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = \mathfrak{v}'' + \mathfrak{w}'' , \quad (!)$$

u. s. w. — Wir übersehen somit bereits, dass wir in dieser und ähnlicher Weise schliesslich zu folgendem Resultate gelangen:

Allgemeiner Satz. — *Benutzt man P als Collectivbezeichnung für die beiden Potentiale V und W, so ist im Allgemeinen jedwede Ableitung von P folgendermassen darstellbar:*

(5.) $$\frac{\partial^{m+n} P}{\partial x^m \partial y^n} = \mathfrak{V} + \mathfrak{W} ,$$

wo $\mathfrak{V}$ *das Potential einer gewissen einfachen Belegung, und* $\mathfrak{W}$ *das Potential einer gewissen Doppelbelegung vorstellt.*

Will man indessen die Dinge nicht *im Allgemeinen*, sondern mit *wirklicher Genauigkeit* haben, so muss man mühsam von Stufe zu Stufe emporsteigen, und also von den in den beiden vorhergehenden Paragraphen besprochenen *ersten* Ableitungen zunächst emporsteigen zu den *zweiten* Ableitungen. Und zu diesem Zwecke mögen zuvörderst die Ergebnisse jener beiden vorhergehenden Paragraphe in eine etwas einfachere und mehr symmetrische Form versetzt werden.

§ 6.

Recapitulation und Vereinfachung der Theoreme $V\alpha.$, $W\alpha.$ und $V\beta.$, $W\beta.$

Aus den Formeln (*C.*) pag. 3:

$$(A.)\qquad \begin{cases} \xi' = \alpha = \cos\theta\,, \\ \eta' = \beta = \sin\theta\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = -\sin\theta\,, \\ \mathsf{B} = \cos\theta \end{cases}$$

folgt durch Differentiation nach der Bogenlänge σ sofort:

$$(B.)\qquad \begin{cases} \xi'' = \alpha' = \mathsf{A}\theta'\,, \\ \eta'' = \beta' = \mathsf{B}\theta'\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{A}' = -\alpha\theta'\,, \\ \mathsf{B}' = -\beta\theta'\,, \end{cases}$$

und hieraus durch nochmalige Differentiation:

$$(C.)\qquad \begin{cases} \xi''' = \alpha'' = \mathsf{A}\theta'' - \alpha\theta'\theta'\,, \\ \eta''' = \beta'' = \mathsf{B}\theta'' - \beta\theta'\theta'\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{A}'' = -\alpha\theta'' - \mathsf{A}\theta'\theta'\,, \\ \mathsf{B}'' = -\beta\theta'' - \mathsf{B}\theta'\theta'\,. \end{cases}$$

Und mit Rücksicht auf diese Relationen (*A.*), (*B.*), (*C.*) kann den Theoremen $V\beta.$ und $W\beta.$ eine etwas einfachere und mehr symmetrische Gestalt verliehen werden. Aber auch die Theoreme $V\alpha.$ und $W\alpha.$ sind einer etwas bequemeren Darstellung fähig. So z. B. kann das Theorem $V\alpha.$, oder wenigstens der für uns *wichtigste Theil* dieses Theorems folgendermassen ausgesprochen werden [vgl. pag. 22]:

Theorem $V\alpha.$ — *Ist längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function der Bogenlänge* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(1.) *0 und f abtheilungsweis stetige Functionen von σ sind, und dass überdies* $\int f d\sigma = 0$ *ist,*

so wird das Potential

(2.) $$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma$$

in der ganzen unendlichen Ebene allenthalben stetig sein; so dass z. B. die Formeln stattfinden:

(3.) $$V_{as} = V_s = V_{js}\,,$$ [vgl. die Bemerkung pag. 23].

Auch werden alsdann die Werthe V_a, *inclusive der* V_{as}, *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, *und ebenso die* V_j, *inclusive der* V_{js}, *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *bilden.*

Andererseits kann man das Theorem $W\alpha$. (pag. 26), seinem Hauptinhalt nach, folgendermassen ausdrücken:

Theorem $W\alpha$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(4.) *0 und f stetige Functionen von σ sind,*

so wird das Potential

(5.) $$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_{(x, y)}$$

in der Ebene überall stetig sein, mit alleiniger Ausnahme der gegebenen Curve.

Insbesondere werden alsdann die Werthe W_a, *inclusive ihrer Convergenzwerthe* W_{as}, *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, *und die* W_j, *inclusive ihrer Convergenzwerthe* W_{js}, *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *bilden. Ueberdies werden jene Convergenzwerthe durch die Relation*

(6.) $$W_{as} - W_{js} = -2 f_s$$

mit einander verbunden sein.

Bemerkung. — Sagt man von einer Function $F(x)$, sie sei sammt ihrem Differentialquotienten stetig, so ist dadurch schon mitausgesagt die *Existenz* dieses Differentialquotienten.

Aehnlich liegen die Dinge hier. Wenn z. B. gesagt wird, die Werthe W_a bildeten, inclusive ihrer Convergenzwerthe W_{as}, eine *Fundamental-*

function des Gebietes $\mathfrak{A}$, so ist damit schon mitausgesagt die *Existenz* jener Convergenzwerthe, und ebenso auch das *Endlich-* und *Stetigsein* derselben. Denn eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ ist (ihrer Definition zufolge) endlich und stetig in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$, also z. B. auch am Rande von $\mathfrak{A}$.

Die in dem vorstehenden Theorem benutzte Ausdrucksweise dürfte also in Bezug auf *Kürze* und *Schärfe* nichts zu wünschen übrig lassen, und soll demgemäss auch weiterhin zur Anwendung kommen.

Mit Rücksicht auf die zu Anfang dieses Paragraphs notirten Relationen (*A.*), (*B.*), (*C.*) gewinnt das Theorem $V\beta$. (pag. 36) folgende Gestalt:

Theorem $V\beta$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(7.) θ, f *stetige, und* θ', f' *abtheilungsweis stetige Functionen von* σ *sind,*

so sind die ersten Ableitungen des Potentials

$$(8.)\qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f\, d\sigma$$

in jedem von der Curve getrennten Punkte (x, y) *darstellbar durch die Formeln:*

$$(9.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\alpha)'\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-f\mathsf{A})\, d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\beta)'\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-f\mathsf{B})\, d\sigma\,. \quad (!) \end{aligned}$$

Auch werden alsdann die vier Functionen:

$$(10.)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_j,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, vier theils zu $\mathfrak{A}$, *theils zu* $\mathfrak{J}$ *gehörige Fundamentalfunctionen sein. Ueberdies werden jene Convergenzwerthe durch die Relationen*

$$(11.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} &= 2 f_s \mathsf{A}_s\,,\\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{js} &= 2 f_s \mathsf{B}_s\,, \end{aligned}$$

mit einander verbunden sein.

Endlich wird man das Theorem $W\beta$. (pag. 41), mit Rücksicht auf die zu Anfang dieses Paragraphs gegebenen Relationen (*A.*), (*B.*), (*C.*), in folgende Fassung versetzen können:

Theorem $W\beta$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(12.) θ, f, f' *stetige, und* θ', f'' *abtheilungsweis stetige Functionen von* σ *sind,*

so sind die ersten Ableitungen des Potentials

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_{(x, y)} \tag{13.}$$

in jedwedem von der Curve getrenntem Punkte (x, y) *darstellbar durch die Formeln:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(f'\mathsf{A})'\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\alpha)\, d\sigma\,, \quad (!) \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f'\mathsf{B})'\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\beta)\, d\sigma\,. \quad (!) \end{aligned} \tag{14.}$$

Auch werden alsdann die vier Functionen

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a,\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_j,\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_j, \tag{15.}$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, vier theils zu $\mathfrak{A}$ *theils zu* $\mathfrak{I}$ *gehörige Fundamentalfunctionen sein. Ueberdies werden jene Convergenzwerthe durch die Relationen*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js} &= -2 f_s' \alpha_s\,, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{js} &= -2 f_s' \beta_s\,, \end{aligned} \tag{16.}$$

mit einander verbunden sein.

§ 7.

Die zweiten Ableitungen des Potentials V. Theorem $V\gamma$.

Im Anschluss an die auf der Curve vorgeschriebene Function $f = f(\sigma)$ mögen die Abbreviaturen eingeführt sein:

(1.) $$g = (f\alpha)' \quad \text{und} \quad h = -f\mathsf{A}\,.$$

Ueberdies mag vorausgesetzt sein, dass

(2.) θ, θ', f, f' *stetige*, und θ'', f'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ sind. Alsdann werden offenbar*) g, h, h' *stetige*, und g', h'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ sein.

Dies vorangeschickt, ergiebt sich nun für das Potential

$$(3.) \qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma$$

mittelst des Theorems $V\beta$. (pag. 48) die Formel:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int T(f\alpha)' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\left(-f\mathsf{A}\right) d\sigma\,, \quad (!)$$

eine Formel, die man mit Hinblick auf (1.) auch so schreiben kann:

$$(4.) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int T g d\sigma}_{\mathfrak{V}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} h d\sigma}_{\mathfrak{W}}\,. \quad (!)$$

Hieraus folgt, falls man die Integrale rechts mit $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ bezeichnet:

$$(5.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\,, \quad (!) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\,, \quad (!) \end{aligned}$$

wo die Ausrufungszeichen nach wie vor andeuten, dass die betreffenden Formeln nur so lange gültig sind, als der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt* bleibt.

Das Potential $\mathfrak{V}$ (4.):

$$(p.) \qquad \mathfrak{V} = \frac{1}{\pi}\int T g d\sigma$$

subordinirt sich, in Hinblick auf die Angaben (2.), ohne Weiteres dem Theorem $V\beta$. (pag. 48). Hieraus folgt einerseits, dass die Formeln stattfinden:

$$(p'.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\alpha)' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{A}) d\sigma\,, \quad (!) \\ \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\beta)' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{B}) d\sigma\,, \quad (!) \end{aligned}$$

andererseits aber, dass die vier Functionen

*) Vgl. die für α, A gegebenen Formeln (*A.*), (*B.*), (*C.*), pag. 46.

$$(p''.) \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_a, \ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_j, \ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, *vier Fundamentalfunctionen* sind, und dass zwischen diesen Convergenzwerthen die Relationen stattfinden:

$$(p'''.) \qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_{js} &= 2 g_s \mathsf{A}_s , \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_{js} &= 2 g_s \mathsf{B}_s . \end{aligned}$$

Aehnliches ist zu bemerken über das Potential $\mathfrak{W}$ (4.):

$$(q.) \qquad \mathfrak{W} = \frac{1}{\pi} \int \frac{dT}{d\nu} h \, d\sigma .$$

Aus (2.) ergiebt sich nämlich, dass dieses Potential dem Theorem $W\beta$. (pag. 49) sich subordinirt. Und hieraus folgt einerseits, dass die Formeln gelten:

$$(q'.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} &= \frac{1}{\pi} \int T (h' \mathsf{A})' \, d\sigma + \frac{1}{\pi} \int \frac{dT}{d\nu} (h' \alpha) \, d\sigma , \quad (!) \\ \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} &= \frac{1}{\pi} \int T (h' \mathsf{B})' \, d\sigma + \frac{1}{\pi} \int \frac{dT}{d\nu} (h' \beta) \, d\sigma ; \quad (!) \end{aligned}$$

andererseits aber, dass die vier Functionen

$$(q''.) \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_a, \ \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_j, \ \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, *vier Fundamentalfunctionen* sind, und dass zwischen diesen Convergenzwerthen die Relationen stattfinden:

$$(q'''.) \qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_{js} &= - 2 h_s' \alpha_s , \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)_{js} &= - 2 h_s' \beta_s . \end{aligned}$$

Da nun, nach $(p''.)$, $(q''.)$, die $\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_a$ und die $\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_a$, inclusive ihrer Convergenzwerthe, zwei Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{A}$ sind, so gilt Gleiches auch von der Summe dieser beiden Functionen: $\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_a$, d. i. nach (5.) von $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_a$. In solcher Art gelangt man, auf Grund jener Sätze $(p''.)$, $(q''.)$, und mit Rücksicht auf (5.), zu der Einsicht, dass die vier Functionen

$$(6.)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_j;$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, *Fundamentalfunctionen* sind, und dass mithin, wie unmittelbar aus der Symmetrie folgt, Gleiches auch gelten muss von den beiden Functionen

$$(6\alpha.)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_j.$$

Gleichzeitig ergeben sich für die Convergenzwerthe der Functionen (6.) aus (5.), $(p'''.)$, $(q'''.)$ die Relationen:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{js} &= 2g_s\mathsf{A}_s - 2h_s'\alpha_s\,,\\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} &= 2g_s\mathsf{B}_s - 2h_s'\beta_s\,. \end{aligned}$$

Die Werthe der Fundamentalfunctionen (6.), $(6\alpha.)$ sind leicht näher angebbar. Substituirt man nämlich die Werthe $(p'.)$, $(q'.)$ in (5.), so folgt:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\alpha + h'\mathsf{A})'\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{A} + h'\alpha)d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\beta + h'\mathsf{B})'\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{B} + h'\beta)d\sigma\,. \quad (!) \end{aligned}$$

Substituirt man aber hier für g, h ihre eigentlichen Bedeutungen (1.), so erhält man, nach einigen elementaren Reductionen [bei denen die Relationen $(B.)$ pag. 46 von Nutzen sind], die *erste* und *letzte* Formel folgenden Systems:

$$(9.)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{\pi}\int T[f'(\alpha^2 - \mathsf{A}^2) + f\theta'(2\alpha\mathsf{A})]'\,d\sigma\\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}[-f'(2\alpha\mathsf{A}) + f\theta'(\alpha^2 - \mathsf{A}^2)]\,d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{1}{\pi}\int T[f'(\beta^2 - \mathsf{B}^2) + f\theta'(2\beta\mathsf{B})]'\,d\sigma\\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}[-f'(2\beta\mathsf{B}) + f\theta'(\beta^2 - \mathsf{B}^2)]\,d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T[f'(\alpha\beta - \mathsf{A}\mathsf{B}) + f\theta'(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A})]'\,d\sigma\\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}[-f'(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A}) + f\theta'(\alpha\beta - \mathsf{A}\mathsf{B})]\,d\sigma\,, \quad (!) \end{aligned}\right.$$

während die *mittlere* Formel ohne Weiteres hinzugefügt ist nach Analogie der *ersten*.

Desgleichen gelangt man von den Formeln (7.) aus, durch Substitution der in (1.) angegebenen Bedeutungen von g, h, zur *ersten* und *letzten* Formel folgenden Systems:

$$(10.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{js} = 2[f'(2\alpha \mathsf{A}) - f\theta'(\alpha^2 - \mathsf{A}^2)]_s , \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{js} = 2[f'(2\beta \mathsf{B}) - f\theta'(\beta^2 - \mathsf{B}^2)]_s . \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} = 2[f'(\alpha \mathsf{B} + \beta \mathsf{A}) - f\theta'(\alpha\beta - \mathsf{A}\mathsf{B})]_s , \end{cases}$$

wo wiederum die *mittlere* Formel hinzugefügt ist auf Grund ihrer Analogie mit der *ersten*. Dabei sei bemerkt, dass das in (9.), (10.) auftretende θ' den Werth hat:

$$(11.)\qquad \theta' = \frac{\varepsilon}{R} , \quad [\text{vgl. } (E.) \text{ pag. } 4] ,$$

wo R den Krümmungsradius der gegebenen Curve bezeichnet, und wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem der betreffende Krümmungskreis ein innerer oder äusserer ist. Wir können schliesslich die Resultate dieses Paragraphs folgendermassen zusammenfassen:

Theorem $V\gamma$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

$$(12.)\qquad \begin{array}{l} \theta,\ \theta',\ f,\ f' \ \textit{stetige, und}\ \theta'',\ f'' \ \textit{abtheilungsweis} \\ \textit{stetige Functionen von}\ \sigma\ \textit{sind,} \end{array}$$

so sind die zweiten Ableitungen des Potentials

$$(13.)\qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma$$

für jeden von der Curve getrennten Punkt (x, y) *durch die Formeln* (9.) *darstellbar.*

Ferner werden alsdann die sechs Functionen

$$(14.)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_a , \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_a , \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_j , \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_j , \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_j ,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, sechs theils zu $\mathfrak{A}$, *theils zu* $\mathfrak{J}$ *gehörige Fundamentalfunctionen sein. Und überdies werden jene Convergenzwerthe durch die Relationen* (10.) *mit einander verbunden sein.*

Bemerkung. — Nimmt man ebenso wie früher [vgl. die Bemerkung pg. 37] zur x-Axe eine positive Tangente der Curve, und zur y-Axe die im Berührungspunkte s errichtete innere Normale, so wird für diesen Punkt s das Azimuth $\theta = 0$, mithin [nach (A) pag. 46]:

$$\alpha = 1\ , \quad \beta = 0\ , \quad \mathsf{A} = 0\ , \quad \mathsf{B} = 1\ ,$$

sodass also die Formeln (10.), mit Rücksicht auf (11.), für diesen speciellen Punkt s die Gestalt erhalten:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{js} = -2\left(\frac{f\varepsilon}{R}\right)_s ,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{js} = +2\left(\frac{f\varepsilon}{R}\right)_s ,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} = +2 f_s' .$$

Die Richtigkeit dieser Formeln lässt sich z. B. leicht controliren für eine gleichmässig mit Masse belegte Kreisperipherie. Für eine solche Belegung ist nämlich das Potential auf *innere* Punkte constant, andererseits aber das Potential auf *äussere* Punkte $= M \log \frac{1}{r}$, wo M die Gesammtmasse der Belegung, und r die Centraldistanz des sollicitirten Punktes vorstellt. U. s. w.

§ 8.

Die zweiten Ableitungen des Potentials W. Theorem $W\gamma$.

Zur Abkürzung sei gesetzt:

(1.) $$g = (f'\mathsf{A})' \text{ und } h = f'\alpha .$$

Zugleich mag angenommen werden, dass

(2.) θ, θ', f, f', f'' *stetige*, und θ'', f''' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ sind. Alsdann werden offenbar*) g, h, h' *stetige*, und g', h'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ sein.

Dies vorangeschickt, ergiebt sich nun für das Potential

(3.) $$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma ,$$

mittelst des Theorems $W\beta$. (pag. 49) die Formel:

*) Vgl. die Formeln $(A.)$, $(B.)$,.$(C.)$ pag. 46.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int T(f'\mathsf{A})'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\alpha)d\sigma\,, \quad (!)$$

d. i. mit Rücksicht auf (4.):

$$(4.)\qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int Tgd\sigma}_{\mathfrak{V}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}hd\sigma}_{\mathfrak{W}}\,; \quad (!)$$

woraus folgt:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\,, \quad (!)\\ \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\,. \quad (!) \end{aligned}$$

Das Potential $\mathfrak{V}$ (4.):

$$(P.)\qquad \mathfrak{V} = \frac{1}{\pi}\int Tgd\sigma$$

subordinirt sich [vgl. (2.)] dem Theorem $V\beta$. (pag. 48). Hieraus folgt einerseits, dass die Formeln stattfinden:

$$(P'.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\alpha)'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{A})d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\beta)'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{B})d\sigma\,, \quad (!) \end{aligned}$$

andrerseits aber — u. s. w. Kurz es ergeben sich genau dieselben Formeln und Bemerkungen, wie sie im vorigen Paragraph in $(p.)$, $(p'.)$, $(p''.)$, $(p'''.)$ und $(q.)$, $(q'.)$, $(q.'')$, $(q'''.)$ notirt worden sind, nur mit dem Unterschiede, dass g und h hier andere Bedeutungen haben als damals.

Demgemäss sind auch die weitern Ergebnisse analog mit denen des vorigen Paragraphs. Man gelangt nämlich zu dem Resultate, dass die sechs Functionen

$$(6.)\qquad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, *Fundamentalfunctionen* sind, ferner zu dem Resultate, dass zwischen den soeben genannten Convergenzwerthen die Relationen stattfinden:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{js} &= 2g_s\mathsf{A}_s - 2h_s'\alpha_s\,,\\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} &= 2g_s\mathsf{B}_s - 2h_s'\beta_s\,. \end{aligned}$$

und endlich auch zu dem Resultate, dass für jene Functionen (6.) die Formeln gelten:

$$(8.)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\alpha + h'\mathsf{A})'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{A} + h'\alpha)d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\beta + h'\mathsf{B})'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{B} + h'\beta)d\sigma\,. \quad (!) \end{aligned}$$

Substituirt man hier in (8.) für g und h ihre eigentlichen Bedeutungen (1.), so erhält man, nach einfachen Reductionen [bei denen die Relationen (*B.*) pag. 46 von Nutzen sind], die *erste* und *letzte* Formel folgenden Systems:

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{1}{\pi}\int T[f''(2\alpha\mathsf{A}) - f'\theta'(\alpha^2 - \mathsf{A}^2)]'d\sigma\\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int\frac{dT}{d\nu}[f''(\alpha^2 - \mathsf{A}^2) + f'\theta'(2\alpha\mathsf{A})]d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= \frac{1}{\pi}\int T[f''(2\beta\mathsf{B}) - f'\theta'(\beta^2 - \mathsf{B}^2)]'d\sigma\\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int\frac{dT}{d\nu}[f''(\beta^2 - \mathsf{B}^2) + f'\theta'(2\beta\mathsf{B})]d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T[f''(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A}) - f'\theta'(\alpha\beta - \mathsf{A}\mathsf{B})]'d\sigma\\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int\frac{dT}{d\nu}[f''(\alpha\beta - \mathsf{A}\mathsf{B}) + f'\theta'(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A})]d\sigma\,, \quad (!) \end{aligned}\right.$$

in welchem die *mittlere* Formel hinzugefügt ist nach Analogie der *ersten*.

Desgleichen gelangt man von den Formeln (7.) aus, durch Substitution jener Werthe (1.), zu folgendem Formelsystem:

$$(10.)\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{js} &= -2[f''(\alpha^2 - \mathsf{A}^2) + f'\theta'(2\alpha\mathsf{A})]_s\,,\\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{js} &= -2[f''(\beta^2 - \mathsf{B}^2) + f'\theta'(2\beta\mathsf{B})]_s\,,\\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} &= -2[f''(\alpha\beta - \mathsf{A}\mathsf{B}) + f'\theta'(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A})]_s\,; \end{aligned}\right.$$

hier ist wiederum:

$$(11.)\qquad \theta' = \frac{\varepsilon}{R}\,,$$

wo R den Krümmungsradius der gegebenen Curve vorstellt, und $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem der betreffende Krümmungskreis ein innerer oder äusserer ist. — Somit ergiebt sich folgendes Theorem:

Theorem $W\gamma$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(12.) $\theta,\ \theta',\ f,\ f',\ f''$ *stetige und* θ'', f''' *abtheilungsweis stetige Functionen von* σ *sind,*

so sind die zweiten Ableitungen des Potentials

$$(13.)\qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_{(x,\,y)}$$

für jeden von der Curve getrennten Punkt (x, y) *darstellbar durch die Formeln* (9.)

Ferner werden alsdann die sechs Functionen

$$(14.)\qquad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, sechs theils zu $\mathfrak{A}$, *theils zu* $\mathfrak{J}$ *gehörige Fundamentalfunctionen sein. Und endlich werden jene Convergenzwerthe durch die Relationen* (10.) *mit einander verbunden sein.*

Bemerkung. — Nimmt man zur x-Axe eine positive Tangente der Curve, und zur y-Axe die im Berührungspunkte s errichtete innere Normale, so wird für diesen Punkt s das Azimuth $\theta = 0$, mithin [nach (4.) pag. 46]:

$$\alpha = 1,\quad \beta = 0,\quad \mathsf{A} = 0,\quad \mathsf{B} = 1;$$

sodass also die Formeln (10.), mit Rücksicht auf (11.), für diesen speciellen Punkt s die Gestalt gewinnen:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{js} = -2f_s'',$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{js} = +2f_s'',$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} = -2\left(\frac{\varepsilon f'}{R}\right)_s,$$

wo R den Krümmungsradius vorstellt, und $\varepsilon = \pm 1$ ist.

§ 9.

Tabellarische Uebersicht.

Blickt man zurück auf die Theoreme $V\alpha.$, $W\alpha.$, $V\beta.$, $W\beta.$, $V\gamma.$, $W\gamma.$ pag. 46—57, so sieht man, dass die Voraussetzungen, unter denen diese Theoreme aufgestellt sind, durch folgende Tabelle angedeutet werden können:

$V\alpha$.	$(0, f)$.	$W\alpha$.	$0, f$.
$V\beta$.	$0, f, (0', f')$.	$W\beta$.	$0, f, f', (0'', f'')$.
$V\gamma$.	$0, 0', f, f', (0'', f'')$.	$W\gamma$.	$0, 0', f, f', f'', (0'', f''')$.

In dieser Tabelle sind nämlich diejenigen Functionen, welche *stetig* sein sollen, geradezu hingeschrieben, diejenigen Functionen aber, welche nur *abtheilungsweise stetig* zu sein brauchen, in Klammern beigefügt.

Aus dieser Tabelle erkennt man bereits mit ziemlicher Sicherheit, wie die weiteren Theoreme $V\delta$., $W\delta$., $V\varepsilon$., $W\varepsilon$., etc. lauten werden.

§ 10.

Ueber eine aus zwei Potentialen V und W zusammengesetzte monogene Function.

Markirt man irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{S}$ einen Punkt $j(x, y)$ und bezeichnet man den von diesem Punkte nach irgend einem Curvenpunkte (ξ, η) gezogenen Radiusvector mit E, und das Azimuth desselben gegen die x-Axe mit γ, so ist offenbar

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{y-\eta}{x-\xi}\,; \tag{1.}$$

woraus durch partielle Differentiation nach x und y die Formeln sich ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial x} &= -\frac{y-\eta}{E^2} = +\frac{\partial T}{\partial y}\,, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial y} &= +\frac{x-\xi}{E^2} = -\frac{\partial T}{\partial x}\,, \text{ wo } T = \log\frac{1}{E}\,. \end{aligned} \tag{2.}$$

Ist nun längs der gegebenen Curve eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass

(3.) 0, f *stetige* Functionen, und dass überdies f' eine *abtheilungsweis stetige* Function ist,

so subordiniren sich die Potentiale

$$V = V(x,y) = \frac{1}{\pi}\int T f'\,d\sigma \quad \text{und} \quad W = W(x,y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\,d\sigma \tag{4.}$$

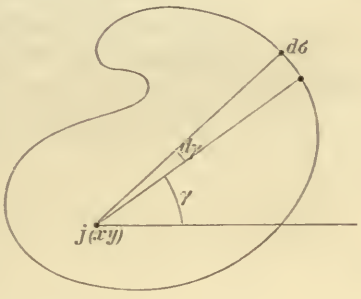
resp. den Theoremen $V\alpha$. pag. 46 und $W\alpha$. pag. 47; so dass also z. B. die beiden Functionen

(5.) $$V_j \text{ und } W_j ,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, zwei *Fundamentalfunctionen* des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein werden.

Dies vorangeschickt, wollen wir jetzt die Function W_j einer gewissen Transformation unterwerfen. Sind γ und $\gamma + d\gamma$ diejenigen Werthe des vorhin definirten Azimuths, welche respective den Bogenlängen σ und $\sigma + d\sigma$ entsprechen (vergl. die beistehende Figur), so wird:

(6.) $$W_j = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_j = \frac{1}{\pi}\int f\, d\gamma .$$



In der That erkennt man leicht, dass $(d\sigma)_j$ und $d\gamma$ unter allen Umständen einander *gleich* sind, einerlei ob der in j befindliche Beobachter die innere oder die äussere Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat.

Aus (6.) folgt sofort:

(7.) $$W_j = \frac{1}{\pi}\int \Big(d(\gamma f) - \gamma\, df \Big) ,$$

(8.) $$\text{d. i. } W_j = \frac{1}{\pi}[\gamma f] - \frac{1}{\pi}\int \gamma f'\, d\sigma ,$$

wo $[\gamma f]$ die Differenz derjenigen Werthe vorstellt, welche das Product γf zu Ende und zu Anfang des Integrationsintervalles besitzt. Denkt man sich also das Azimuth von einem festen Curvenpunkte s_0 aus gerechnet, dessen Azimuth $\gamma = \gamma_0$ ist, so wird $[\gamma f] = (\gamma_0 + 2\pi) f_0 - \gamma_0 f_0 = 2\pi f_0$ sein, wo f_0 den Werth von f in s_0 vorstellt; so dass man also erhält:

(9.) $$W_j = 2 f_0 - \frac{1}{\pi}\int \gamma f'\, d\sigma .$$

Dies erscheint befremdlich. Denn hätte man statt s_0 irgend einen andern festen Punkt s_1 gewählt, so würde sich ergeben haben:

(10.) $$W_j = 2 f_1 - \frac{1}{\pi}\int \gamma f'\, d\sigma ,$$

wo f_1 den Werth von f in s_1 vorstellt. Und man würde also in

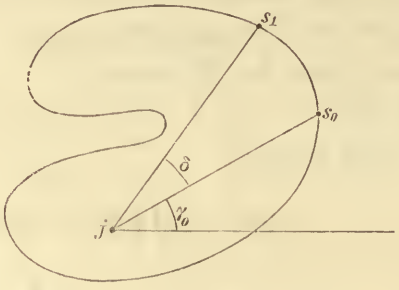
solcher Art für ein und dasselbe W_j zwei von einander verschiedene Werthe (9.) und (10.) erhalten. Doch lässt sich leicht zeigen [vergl. die folgende Erläuterung], dass die beiden in (9.) und (10.) enthaltenen Integrale, obwohl der Form nach identisch, *verschiedene* Werthe haben, und dass mit Rücksicht hierauf die rechten Seiten jener Formeln (9.) und (10.) sich als *gleich gross* ergeben.

Erläuterung. — Wir bezeichnen die Integrale (9.) und (10.) mit U_0 und U_1, geben jenen beiden Formeln also folgende Gestalt:

$$(A.) \qquad W_j = 2f_0 - \frac{1}{\pi} U_0 ,$$

$$(B.) \qquad W_j = 2f_1 - \frac{1}{\pi} U_1 .$$

Das Azimuth γ ist derjenige Winkel, unter welchem der von j nach einem Curvenpunkte hin gelegte Radiusvector gegen die x-Axe geneigt ist, und wird daher um 2π anwachsen, sobald man den Curvenpunkt längs der



Curve einmal herumlaufen lässt. Bezeichnet man also die Bogenlänge dieses Curvenpunktes mit σ, so ist γ eine *nichtperiodische* Function von σ. Sind nun γ_0 und $\gamma_0 + \delta$ die Azimuthe der beiden festen Punkte s_0 und s_1 [vgl. die Figur], so ist das Integral U_0 hinzuerstrecken von γ_0 bis $(\gamma_0 + 2\pi)$, hingegen das Integral U_1 hinzuerstrecken von $(\gamma_0 + \delta)$ bis $(\gamma_0 + \delta + 2\pi)$; sodass man also schreiben kann:

$$U_0 = \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+\delta} \gamma f' d\sigma + \int_{\gamma_0+\delta}^{\gamma_0+2\pi} \gamma f' d\sigma ,$$

$$U_1 = \int_{\gamma_0+\delta}^{\gamma_0+2\pi} \gamma f' d\sigma + \int_{\gamma_0+2\pi}^{\gamma_0+2\pi+\delta} \gamma f' d\sigma .$$

Subtrahirt man diese beiden Formeln von einander, so hebt sich das Integral oben rechts gegen das Integral unten links fort; sodass man erhält:

$$U_1 - U_0 = \int_{\gamma_0+2\pi}^{\gamma_0+\delta+2\pi} \gamma f' d\sigma - \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+\delta} \gamma f' d\sigma$$

Die in dieser letzten Formel enthaltenen Integrale durchlaufen beide *denselben* Bogen $s_0 s_1$; sodass also in beiden *dieselben* Bogenelemente $d\sigma$ und auch *dieselben* Werthe von f' in Betracht kommen. Hingegen bemerkt man, dass das erste mit dem Anfangswerthe $(\gamma_0 + 2\pi)$, das zweite aber mit dem Anfangswerthe γ_0 ausgeht, und dass überhaupt in jedem Punkte des Bogens $s_0 s_1$ bei dem einen und anderen Integral zwei Werthe von γ in Betracht kommen, die um 2π von einander abweichen. Somit geht die letzte Formel über in:

$$U_1 - U_0 = 2\pi \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+\delta} f'\, d\sigma, \text{ d. i.: } = 2\pi \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+\delta} df,$$

$$(C.) \qquad \text{d. i.: } U_1 - U_0 = 2\pi (f_1 - f_0),$$

wo f_0 und f_1, ebenso wie früher, die Werthe von f in s_0 und s_1 vorstellen. Diese Formel (*C.*) aber lässt sofort erkennen, dass die beiden in (*A.*) und (*B.*) für Wj aufgestellten Werthe einander *gleich* sind. — *Q. e. d.*

Offenbar gilt die Formel (9.) für jeden *beliebigen* Punkt $j(x, y)$, falls nur derselbe von der Curve *getrennt* ist. Demgemäss ergeben sich durch Differentiation der Formel (9.) nach x und y die Gleichungen:

$$(11.) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial \gamma}{\partial x} f'\, d\sigma, \quad (!)$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial \gamma}{\partial y} f'\, d\sigma, \quad (!)$$

wo zur Abkürzung W für W_j gesetzt ist. Diese Gleichungen sind mit Rücksicht auf (2.) auch so darstellbar:

$$(12.) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial T}{\partial y} f'\, d\sigma, \quad (!)$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} = +\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial T}{\partial x} f'\, d\sigma. \quad (!)$$

Vergleicht man nun diese Formeln (12.) mit den aus (4.) für das Potential V sich ergebenden Formeln:

$$(13.) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial T}{\partial x} f'\, d\sigma, \quad (!)$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial T}{\partial y} f'\, d\sigma, \quad (!)$$

so gelangt man sofort zu den Relationen:

$$(14.) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial W}{\partial x}; \quad (!)$$

mithin zu der Einsicht, dass der Ausdruck

$$V + iW\,, \quad (i = \sqrt{-1})\,, \tag{15.}$$

innerhalb $\mathfrak{I}$ eine *monogene* Function von $x + iy$ ist.

Analoges ergiebt sich in analoger Weise für jeden Punkt *innerhalb* $\mathfrak{A}$; so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Satz. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function der Bogenlänge* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

$$\theta,\ f \textit{ stetig und } f' \textit{ abtheilungsweis stetig sind,} \tag{16.}$$

so wird das aus den beiden Potentialen

$$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int Tf'\,d\sigma \quad \textit{und} \quad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\,f\,d\sigma \tag{17.}$$

zusammengesetzte Binom

$$V + iW\,, \quad (i = \sqrt{-1})\,, \tag{18.}$$

für jedweden von der Curve getrennten Punkt eine monogene Function von $x + iy$ *sein.*

Gleichzeitig werden die beiden Functionen

$$V_a + iW_a \quad \textit{und} \quad V_j + iW_j\,, \tag{19.}$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, zwei respective zu $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{I}$ *gehörige Fundamentalfunctionen sein.* — Diese letztere Behauptung ergiebt sich für das Binom $V_j + iW_j$ ohne Weiteres aus dem bei (5.) Bemerkten, und für das Binom $V_a + iW_a$ in analoger Weise.

Zweites Capitel.

Ueber Fundamentalfunctionen mit vorgeschriebenen Randwerthen, namentlich über die Differentialquotienten dieser Fundamentalfunctionen.

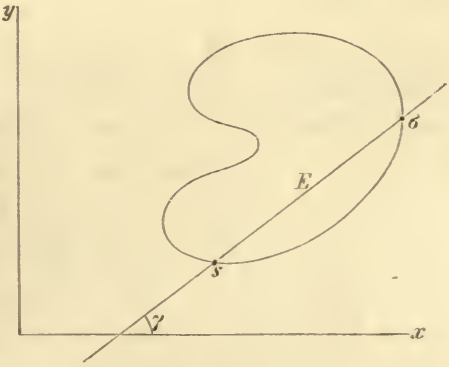
Erst nach Absolvirung einiger vorbereitender Betrachtungen (§ 11 und § 12), werden wir zu unserm eigentlichen Thema gelangen, und (in § 13) dasjenige *Theorem* aufstellen, welches den eigentlichen Höhepunkt dieses Capitels repräsentirt, und von welchem in der Einleitung (pag. 10) bereits die Rede war. Dieses Theorem wird uns sodann Veranlassung geben zu gewissen weiteren Untersuchungen (§ 14 und § 15), namentlich auch zur Untersuchung *monogener* Fundamentalfunctionen.

§ 11.

Vorläufige Betrachtungen über die Azimuthe θ und γ.

Auf der gegebenen Curve seien zwei Punkte markirt mit den Bogenlängen σ und s, deren Coordinaten ξ, η und x, y also die Werthe haben [vgl. pag. 3]:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \xi = \mathfrak{F}(\sigma) , \\ \eta = \mathfrak{G}(\sigma) , \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{F}(s) , \\ y = \mathfrak{G}(s) . \end{cases}$$



Ferner sei E der gegenseitige Abstand der beiden Punkte, und γ dasjenige Azimuth, unter welchem diese Linie E (fortlaufend gedacht von s nach σ) gegen die x-Axe geneigt ist.

Alsdann sind offenbar E und

γ Functionen der beiden Bogenlängen σ und s. Für diese Functionen gelten, unter Anwendung der Abkürzungen:

$$\Xi = \xi - x \quad \text{und} \quad \mathsf{H} = \eta - y \tag{2.}$$

die Formeln:

$$E^2 = \Xi^2 + \mathsf{H}^2, \quad \cos\gamma = \frac{\Xi}{E}, \quad \sin\gamma = \frac{\mathsf{H}}{E}. \tag{3.}$$

Hieraus folgt z. B.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} &= +\frac{\Xi\eta' - \mathsf{H}\xi'}{E^2}, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial s} &= -\frac{\Xi y' - \mathsf{H}x'}{E^2}, \end{aligned} \tag{4.}$$

und weiter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2} &= +\frac{\Xi\eta'' - \mathsf{H}\xi''}{E^2} - 2\frac{(\Xi\eta' - \mathsf{H}\xi')(\Xi\xi' + \mathsf{H}\eta')}{E^4}, \\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2} &= -\frac{\Xi y'' - \mathsf{H}x''}{E^2} - 2\frac{(\Xi y' - \mathsf{H}x')(\Xi x' + \mathsf{H}y')}{E^4}, \\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\partial s} &= -\frac{x'\eta' - y'\xi'}{E^2} + 2\frac{(\Xi\eta' - \mathsf{H}\xi')(\Xi x' + \mathsf{H}y')}{E^4}, \end{aligned} \tag{5.}$$

wo selbstverständlich ξ', η', ξ'', η'' die Ableitungen von ξ, η nach der Bogenlänge σ, und ebenso x', y', x'', y'' die Ableitungen von x, y nach der Bogenlänge s vorstellen.

Lässt man die beiden Bogenlängen σ und s einander *gleich* werden, oder allgemeiner, lässt man die Differenz der beiden Bogenlängen gleich einem ganzen Vielfachen von Σ werden, wo Σ den Umfang der Curve vorstellt, so erfolgt ein *Nullwerden* von E, mithin ein *Unendlichwerden* der Ausdrücke (4.), (5.). Dieses Unendlichwerden ist aber, wie man leicht übersieht, in der Regel nur ein *scheinbares*.

Um näher auf die Sache einzugehen, denken wir uns je zwei *Curvenpunkte* σ und s geometrisch dargestellt durch einen einzigen *idealen Punkt* (σ, s). Dieser letztere soll in irgend einer Hülfsebene liegen, und in Bezug auf ein in dieser Hülfsebene festgesetztes senkrechtes Axensystem zwei Coordinaten σ und s besitzen, die ebenso gross sind, wie die Bogenlängen jener beiden Curvenpunkte. In dieser σs-Ebene wird alsdann eine Function $F(\sigma, s)$ in irgend einem Punkte (σ, s) *stetig* zu nennen sein, sobald sie der bekannten Bedingung genügt, dass all' ihre Werthdifferenzen innerhalb eines

um den Punkt (σ, s) beschriebenen Kreises durch Verkleinerung des Kreisradius unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind. Solches festgesetzt, gelten für die Ausdrücke (4.), (5.) folgende Sätze:

Erster Satz. — *Ist die gegebene Curve von solcher Beschaffenheit, dass*

(6.) θ *und* θ' *stetige Functionen von* σ *sind,*

so werden

(6a.) $$\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

Functionen von (σ, s) *sein, welche in der* σs*-Ebene allenthalben stetig sind.*

Zweiter Satz. — *Ist die gegebene Curve der Art beschaffen, dass*

(7.) θ, θ' *und* θ'' *stetige Functionen von* σ *sind,*

so werden

(7a.) $$\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma^2}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma \partial s}$$

Functionen von (σ, s) *sein, welche in der* σs*-Ebene allenthalben stetig sind.*

Allgemeiner Satz. — *Nimmt man an, es seien*

(8.) θ, θ', θ'', θ''', ... $\theta^{(n)}$ *stetige Functionen von* σ,

so werden sämmtliche Ausdrücke

(8a.) $$\frac{\partial^{p+q} \gamma}{\partial \sigma^p \partial s^q} \qquad (p + q \leqq n)$$

Functionen von (σ, s) *sein, die in der* σs*-Ebene allenthalben stetig sind.*

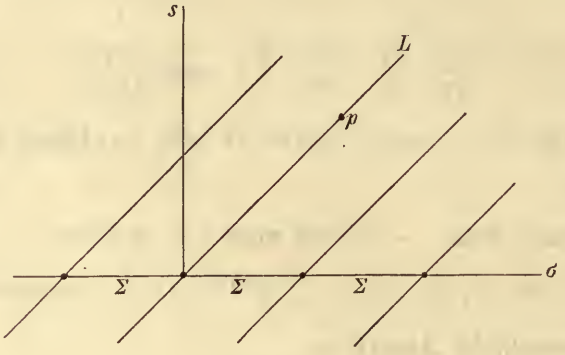
Beweis des ersten Satzes. — Die Grössen γ, $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$ sind Functionen von σ und s. Während aber γ eine *nichtperiodische* Function repräsentirt, sind $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$ *periodisch* sowohl nach σ, wie auch nach s. Und zwar ist die Periodenlänge für jedes dieser beiden Argumente $= \Sigma$; wie sich solches z. B. aus den Formeln (4.) sofort ergiebt, falls man nur beachtet, dass ξ, η, ξ', η' periodische Functionen von σ sind [vergl. V., pag. 4, 5], und dass ebenso x, y, x', y' periodische Functionen von s sind. Denkt man sich also die

σs-Ebene parallel ihren beiden Axen in lauter Quadrate, jedes von der Seitenlänge Σ zerlegt, so werden die Werthe, welche $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$ oder $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$ in *einem* dieser Quadrate besitzt, in jedem *andern* Quadrate von Neuem und in derselben Anordnung sich wiederholen.

Die Formel $\sigma - s = \text{Const.}$ repräsentirt in der σs-Ebene ein System paralleler Linien, die gegen die σ-Axe, und ebenso auch gegen die s-Axe unter 45° geneigt sind. Bezeichnet nun M eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so mögen diejenigen unter jenen Parallellinien, welche durch die Formel

$$\sigma - s = M\Sigma$$

dargestellt sind, kurzweg die *Hauptlinien* heissen. Diese Hauptlinien sind *äquidistant*. Eine derselben — sie mag L heissen —



geht durch den Anfangspunkt; und die übrigen schneiden die σ-Axe in Punkten, die in der Entfernung Σ auf einander folgen.

Dass die Functionen $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$ in jedwedem Punkte (σ, s), der *nicht* auf einer Hauptlinie liegt, *stetig* sind, unterliegt keinem Zweifel. Denn durch jeden solchen Punkt (σ, s) werden zwei *von einander verschiedene* Curvenpunkte angedeutet sein, also zwei Punkte, deren $E > 0$ ist; so dass sich also in diesem Falle die Stetigkeit jener Functionen auf Grund der Formeln (4.) leicht ergiebt.

Zu untersuchen bleibt also nur noch das Verhalten der Functionen $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$ in denjenigen Punkten (σ, s), *die einer Hauptlinie angehören*. Und hierbei können wir uns auf *eine* dieser Hauptlinien z. B. auf L beschränken. Denn die Functionen werden, in Folge

ihrer Periodicität, auf jeder *andern* Hauptlinie genau dasselbe Verhalten zeigen, wie auf L.

Für die von (σ, s) abhängende Function $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$ gilt nach (4.) und (3.) die Formel:

$$(\alpha.) \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} = \frac{\Xi \eta' - \mathsf{H} \xi'}{\Xi^2 + \mathsf{H}^2} .$$

Nun sind, zufolge der Voraussetzungen (6.), die sechs Grössen

$$(\beta.) \qquad \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{F}(\sigma) , & \xi' &= \mathfrak{F}'(\sigma) , & \xi'' &= \mathfrak{F}''(\sigma) , \\ \eta &= \mathfrak{G}(\sigma) , & \eta' &= \mathfrak{G}'(\sigma) , & \eta'' &= \mathfrak{G}''(\sigma) \end{aligned}$$

*stetige**) Functionen von σ. Setzt man also $s - \sigma = \Delta$, so erhält man für die Coordinaten

$$(\gamma.) \qquad \begin{aligned} x &= \mathfrak{F}(s) = \mathfrak{F}(\sigma + \Delta) , \\ y &= \mathfrak{G}(s) = \mathfrak{G}(\sigma + \Delta) \end{aligned}$$

nach bekanntem Satze folgende Darstellungen:

$$(\delta.) \qquad \begin{aligned} x &= \mathfrak{F}(\sigma) + \frac{\Delta}{1} \mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2} \mathfrak{F}''(\sigma + \vartheta_1 \Delta) , \\ y &= \mathfrak{G}(\sigma) + \frac{\Delta}{1} \mathfrak{G}'(\sigma) + \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2} \mathfrak{G}''(\sigma + \vartheta_2 \Delta) , \end{aligned}$$

wo ϑ_1, ϑ_2 unbekannte positive echte Brüche vorstellen. Aus $(\beta.)$, $(\delta.)$ folgt durch Subtraction:

$$(\varepsilon.) \qquad \begin{aligned} \Xi = \xi - x &= -\Delta \left(\mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta}{2} \mathfrak{F}''(\sigma + \vartheta_1 \Delta) \right) , \\ \mathsf{H} = \eta - y &= -\Delta \left(\mathfrak{G}'(\sigma) + \frac{\Delta}{2} \mathfrak{G}''(\sigma + \vartheta_2 \Delta) \right) , \end{aligned}$$

und hieraus, unter Zuziehung der Formeln $(\beta.)$:

$$(\zeta.) \qquad \Xi \eta' - \mathsf{H} \xi' = \frac{\Delta^2}{2} \left(\mathfrak{F}'(\sigma) \mathfrak{G}''(\sigma + \vartheta_2 \Delta) - \mathfrak{G}'(\sigma) \mathfrak{F}''(\sigma + \vartheta_1 \Delta) \right) .$$

Substituirt man aber diese Werthe $(\varepsilon.)$, $(\zeta.)$ in $(\alpha.)$, und beachtet man dabei die bekannte Relation:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1 , \quad \text{d. i.} \quad (\mathfrak{F}'(\sigma))^2 + (\mathfrak{G}'(\sigma))^2 = 1 , \quad \text{[vgl. } (D) \text{. pag. 4]} ,$$

so hebt sich Δ^2 fort; und man erhält, indem man das zurückbleibende Δ durch seinen eigentlichen Werth $s - \sigma$ ersetzt, die Formel:

*) Man vergl. z. B. die Note pag. 31.

$$(\eta.)\qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}=\frac{\frac{1}{2}\Big(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{G}''(\sigma_2)-\mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{F}''(\sigma_1)\Big)}{1+\frac{s-\sigma}{1}\Big(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{F}''(\sigma_1)+\mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{G}''(\sigma_2)\Big)+\Big(\frac{s-\sigma}{2}\Big)^2\Big((\mathfrak{F}''(\sigma_1))^2+(\mathfrak{G}''(\sigma_2))^2\Big)},$$

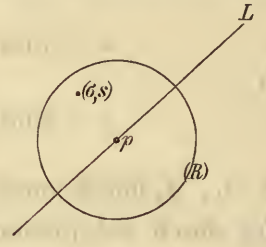
in welcher σ_1 und σ_2 Abbreviaturen sind für $\sigma+\vartheta_1\Delta$ und $\sigma+\vartheta_2\Delta$. Demgemäss ist:

$$(\vartheta.)\qquad \begin{aligned}\sigma_1&=\sigma+\vartheta_1(s-\sigma)\,,\\ \sigma_2&=\sigma+\vartheta_2(s-\sigma)\,;\end{aligned}$$

so dass also σ_1 und σ_2 Grössen vorstellen, deren Werthe zwischen σ und s liegen. Mittelst der Formel $(\eta.)$ wollen wir jetzt das Verhalten der Function $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$ in irgend einem Punkte p der durch den Anfangspunkt gehenden Hauptlinie L [vgl. die vorhergehende und auch die folgende Figur] näher untersuchen.

Für diesen Punkt p sind die beiden rechtwinkligen Coordinaten σ_p und s_p einander gleich:

$$(\iota.)\qquad \sigma_p=s_p\,.$$



Beschreibt man nun um p, als Centrum, einen kleinen Kreis vom Radius R, so gelten für jedweden Punkt (σ, s) *innerhalb* dieses Kreises die Formeln:

$$(\varkappa.)\qquad \text{abs}\,(\sigma-\sigma_p)\leqq R\,,\quad \text{abs}\,(s-s_p)\leqq R\,.$$

Ferner ergiebt sich mit Rücksicht auf $(\iota.)$: $s-\sigma=(s-s_p)-(\sigma-\sigma_p)$, also mit Hülfe von $(\varkappa.)$:

$$(\lambda.)\qquad \text{abs}\,(s-\sigma)\leqq 2R\,.$$

Ferner ist nach $(\vartheta.)$: $(\sigma_1-\sigma_p)=(\sigma-\sigma_p)+\vartheta_1(s-\sigma)$, also mit Rücksicht auf $(\varkappa.)$, $(\lambda.)$:

$$(\mu.)\qquad \begin{cases}\text{abs}\,(\sigma_1-\sigma_p)\leqq 3R\,; & \text{und ebenso ergiebt sich:}\\ \text{abs}\,(\sigma_2-\sigma_p)\leqq 3R\,.\end{cases}$$

All' diese Formeln $(\varkappa.)$, $(\lambda.)$, $(\mu.)$ *gelten für jedweden Punkt* (σ, s) *innerhalb jenes um* p *mit dem Radius* R *beschriebenen Kreises, welch' letzterer mit* (p, R) *bezeichnet sein mag.*

Da nun die Functionen $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, wie bei $(\beta.)$ betont wurde, durchweg *stetig*, mithin auch durchweg *endlich* sind, so wird man, in Anbetracht der Relation $(\lambda.)$:

$$\text{abs}\,(s - \sigma) \leqq 2R\,,$$

durch Verkleinerung des Radius R dafür sorgen können, dass der *Nenner* des Ausdruckes $(\eta.)$ für alle innerhalb des Kreises (p, R) vorhandenen Punkte (σ, s) beliebig wenig von 1 abweicht.

Sodann wird man ferner, in Anbetracht der Stetigkeit von $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ und in Anbetracht der Relationen $(\varkappa.)$, $(\mu.)$:

$$\begin{aligned}
&\text{abs}\,(\sigma - \sigma_p) \leqq R\,,\\
&\text{abs}\,(\sigma_1 - \sigma_p) \leqq 3R\,,\\
&\text{abs}\,(\sigma_2 - \sigma_p) \leqq 3R\,,
\end{aligned}$$

durch weitere Verkleinerung von R dafür sorgen können, dass der *Zähler* des Ausdruckes $(\eta.)$ für alle innerhalb des Kreises (p, R) vorhandenen Punkte (σ, s) Schwankungen darbietet, die unterhalb eines beliebig gegebenen Kleinheitsgrades bleiben.

Beides zusammengefasst, ergiebt sich, dass jener Ausdruck $(\eta.)$ innerhalb des Kreises (p, R) Schwankungen besitzt, die durch Verkleinerung von R beliebig klein gemacht werden können. *Folglich ist die Function* $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$ *im Punkte* p *stetig.*

Solches gilt für jedweden Punkt p der Hauptlinie L, und also, in Folge der vorhandenen Periodicität, auch für die Punkte aller übrigen Hauptlinien. Dass andererseits die Function $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$ auch stetig ist in all' denjenigen Punkten (σ, s), die *nicht* auf einer Hauptlinie liegen, — darauf ist schon vorhin aufmerksam gemacht worden. Folglich ist die Function $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$ auf der σs-Ebene *allenthalben stetig.* Gleiches gilt selbstverständlich von $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$. — *Q. e. d.*

Beweis des zweiten und des allgemeinen Satzes. — Der Beweis des zweiten Satzes ist dem des ersten analog. Es mögen daher hier nur einige Andeutungen ihre Stelle finden.

Aus den Voraussetzungen (7.) des zweiten Satzes ergiebt sich sofort, dass die acht Functionen

$$(\alpha.)\qquad \begin{aligned}
&\xi = \mathfrak{F}(\sigma)\,, \quad \xi' = \mathfrak{F}'(\sigma)\,, \quad \xi'' = \mathfrak{F}''(\sigma)\,, \quad \xi''' = \mathfrak{F}'''(\sigma)\,,\\
&\eta = \mathfrak{G}(\sigma)\,, \quad \eta' = \mathfrak{G}'(\sigma)\,, \quad \eta'' = \mathfrak{G}''(\sigma)\,, \quad \eta''' = \mathfrak{G}'''(\sigma)
\end{aligned}$$

stetige Functionen sind. Setzt man also $s - \sigma = \Delta$, so ergeben sich z. B. für die Grössen

$$x = \mathfrak{F}(s) = \mathfrak{F}(\sigma + \Delta),$$
$$x' = \mathfrak{F}'(s) = \mathfrak{F}'(\sigma + \Delta)$$

die Darstellungen:

$$(\beta.) \quad \begin{aligned} x &= \mathfrak{F}(\sigma) + \frac{\Delta}{1}\mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta^2}{2}\mathfrak{F}''(\sigma) + \frac{\Delta^3}{6}\mathfrak{F}'''(\sigma + \vartheta_1\Delta), \\ x' &= \mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta}{1}\mathfrak{F}''(\sigma) + \frac{\Delta^2}{2}\mathfrak{F}'''(\sigma + \Theta_1\Delta), \end{aligned}$$

wo ϑ_1, Θ_1 positive echte Brüche vorstellen. Demgemäss wird:

$$(\gamma.) \quad \Xi = \xi - x = -\Delta\left(\mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta}{2}\mathfrak{F}''(\sigma) + \frac{\Delta^2}{6}\mathfrak{F}'''(\sigma + \vartheta_4\Delta)\right).$$

Substituirt man jetzt die Werthe $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, sowie auch die mit $(\beta.)$, $(\gamma.)$ analogen Werthe der Grössen y, y', H, in den Formeln (5.), und beachtet man dabei die Relation

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1, \quad \text{d. i.} \quad (\mathfrak{F}'(\sigma))^2 + (\mathfrak{G}'(\sigma))^2 = 1,$$

so erhält man z. B.

$$(\delta.) \quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2} = \frac{U + U_1\Delta + U_2\Delta^2 \cdots + U_5\Delta^5}{1 + W_1\Delta + W_2\Delta^2 \cdots + W_8\Delta^8},$$

$$(\varepsilon.) \quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\partial s} = \frac{V + V_1\Delta + V_2\Delta^2 \cdots + V_4\Delta^4}{1 + W_1\Delta + W_2\Delta^2 \cdots + W_8\Delta^8},$$

wo die U, V, W Grössen vorstellen, die durchweg *endlich* bleiben; so dass also die absoluten Werthe dieser U, V, W durchweg $< M$ sind, wo M eine bestimmte endliche Constante vorstellt. Ueberdies erhält man z. B., was die Formel $(\delta.)$ betrifft, für das *erste Glied* des Zählers den Werth:

$$(\zeta.) \quad \begin{aligned} U = &-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{G}''(\sigma) - \mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{F}''(\sigma)\right)\left(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{F}''(\sigma) + \mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{G}''(\sigma)\right) \\ &+ \frac{1}{3}\left(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{G}'''(\sigma + \vartheta_2\Delta) - \mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{F}'''(\sigma + \vartheta_4\Delta)\right), \end{aligned}$$

wo ϑ_1 und ϑ_2 unbekannte positive echte Brüche vorstellen, von denen der erstere identisch ist mit dem in $(\beta.)$.

Markirt man nun, ebenso wie vorhin, in der σs-Ebene auf der Hauptlinie L einen Punkt p, und beschreibt man um p einen kleinen Kreis vom Radius R, so kann man durch Verkleinerung von R dafür sorgen, dass die Differenz $\Delta = s - \sigma$ für alle innerhalb dieses Kreises befindlichen Punkte beliebig klein wird, dass mithin der Ausdruck $(\delta.)$ für all' diese Punkte beliebig wenig von U abweicht.

Sodann aber kann man durch weitere Verkleinerung von R dafür sorgen, dass die Schwankungen dieses U (ζ.) für alle Punkte innerhalb jenes Kreises beliebig klein werden. Folglich ist die durch (δ.) dargestellte Function $\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}$ eine Function von (σ, s), welche im Punkte p *stetig* ist. U. s. f.

In solcher Art gelangt man zur Constatirung des *zweiten* Satzes, und in ähnlicher Art auch zur Constatirung des in (8.), (8a.) angegebenen *allgemeinen* Satzes.

Beiläufige Betrachtungen. — Die von s nach σ gehende Secante (Fig. pag. 63) verwandelt sich, sobald man s nach σ rücken lässt, in die in σ an die Curve gelegte *Tangente*. Mit andern Worten: der Winkel γ verwandelt sich für $E = 0$ in das Azimuth θ der genannten Tangente. Demgemäss steht zu vermuthen, dass auch die Ableitungen $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial s}$, $\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}$, $\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\partial s}$, $\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}$, etc. für $E = 0$ in einfache Beziehungen treten werden zu den Ableitungen $\theta' = \frac{d\theta}{d\sigma}$, $\theta'' = \frac{d^2\theta}{d\sigma^2}$, etc. Um hierauf näher einzugehen, notiren wir zuvörderst die aus (3.) und (2.) pag. 64 entspringenden Formeln:

$$(A.) \qquad \begin{aligned} E\cos\gamma &= \xi - x\ , \\ E\sin\gamma &= \eta - y\ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach σ:

$$\frac{\partial E}{\partial\sigma}\cos\gamma - E\sin\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \xi' = \cos\theta\ ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial\sigma}\sin\gamma + E\cos\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \eta' = \sin\theta\ ,\ [\text{vgl. } (C.) \text{ pag. } 3],$$

oder, falls man diese Gleichungen nach $\frac{\partial E}{\partial\sigma}$ und $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$ auflöst:

$$(B.) \qquad E\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \sin(\theta - \gamma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial\sigma} = \cos(\theta - \gamma)\ .$$

In analoger Weise ergeben sich aus (A.), falls man nicht nach σ, sondern nach s differenzirt, die analogen Formeln:

$$(C.) \qquad E\frac{\partial\gamma}{\partial s} = -\sin(t - \gamma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial s} = -\cos(t - \gamma)\ ,$$

wo t das Azimuth der im Punkte s an die Curve gelegten Tangente vorstellt.

Differenzirt man jetzt die *erste* der beiden Formeln (*B.*) nochmals nach σ, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die *zweite*:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\cos(\theta-\gamma)+E\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}=\frac{\partial(\theta-\gamma)}{\partial\sigma}\cos(\theta-\gamma)\,,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(D.)\qquad \frac{\partial(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma}\cos(\theta-\gamma)=E\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\,.$$

Hieraus folgt, falls man abermals, und zwar einmal nach σ, das andere Mal nach s differenzirt, und dabei die Gleichungen (*B.*), (*C.*) *rechter* Hand berücksichtigt,

$$(E.)\qquad \frac{\partial^2(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma^2}\cos(\theta-\gamma)-\frac{\partial(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma}\frac{\partial(\theta-\gamma)}{\partial\sigma}\sin(\theta-\gamma)=$$
$$=+\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\cos(\theta-\gamma)+E\frac{\partial^3\gamma}{\partial\sigma^3}\,,$$

$$(F.)\qquad \frac{\partial^2(-2\gamma)}{\partial\sigma\,\partial s}\cos(\theta-\gamma)-\frac{\partial(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma}\frac{\partial(-\gamma)}{\partial s}\sin(\theta-\gamma)=$$
$$=-\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\cos(t-\gamma)+E\frac{\partial^3\gamma}{\partial\sigma^2\,\partial s}\,;$$

wobei, was die Ableitung der letzten Formel betrifft, zu beachten ist, dass θ nur von σ abhängt, nicht aber von s.

Lässt man jetzt die beiden Punkte s und σ miteinander coincidiren, also $\gamma=\theta=t$ und $E=0$ werden, so gewinnen die Formeln (*D.*), (*E.*), (*F.*) die einfachere Gestalt:

$$(G.)\qquad \left.\begin{aligned}&\frac{\partial(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma}=0\,,\\ &\frac{\partial^2(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma^2}=\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\,,\\ &\frac{\partial^2(-2\gamma)}{\partial\sigma\,\partial s}=-\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\,,\end{aligned}\right\}\ \text{für } E=0\ ;$$

und hieraus folgt sofort:

$$(H.)\qquad \left.\begin{aligned}&\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}=\frac{1}{2}\frac{d\theta}{d\sigma}=\frac{1}{2}\theta'\,,\\ &\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}=\frac{1}{3}\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}=\frac{1}{3}\theta''\,,\\ &\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\,\partial s}=\frac{1}{6}\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}=\frac{1}{6}\theta''\,,\end{aligned}\right\}\ \text{für } E=0\,.$$

In wie weit diese beiläufigen Betrachtungen, und namentlich die Formeln (*II.*) *zuverlässig* sind, wird man mittelst der vorhin aufgestellten Sätze (pag. 65) leicht zu beurtheilen im Stande sein.

§ 12.

Einige Hülfssätze.

Es sei A eine gegebene positive Constante. Ferner sei:

$$(1.) \qquad J(s) = \int_0^A \varphi(\sigma)\, F(\sigma, s)\, d\sigma \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(\sigma, s)}{\partial s} = G(\sigma, s)\ ;$$

und zwar mögen die Functionen $\varphi(\sigma)$, $F(\sigma, s)$, $G(\sigma, s)$ *periodisch*†) *sein, der Art, dass jede derselben ungeändert bleibt, sobald man* σ *oder* s *um die Constante* Σ *anwachsen lässt. Ueberdies sei vorausgesetzt, dass* $\varphi(\sigma)$ *längs der* σ*-Axe, und* $F(\sigma, s)$, $G(\sigma, s)$ *in der* σs*-Ebene überall stetig sind. Alsdann gelten folgende Sätze:*

Erster Satz. — *Die durch* (1.) *definirte Function* $J(s)$ *besitzt für jedwedes* s *einen bestimmten Differentialquotienten. Und dieser Differentialquotient ist darstellbar durch die Formel:*

$$(2.) \qquad \frac{dJ(s)}{ds} = \int_0^A \varphi(\sigma) G(\sigma, s)\, d\sigma\ .$$

Zweiter Satz. — *Der soeben genannte Differentialquotient ist eine durchweg stetige Function von* s.

Beweis des ersten Satzes. — Nach (1.) gilt für zwei beliebige Argumente s und s_1 die Formel:

$$(A.) \qquad \frac{J(s_1) - J(s)}{s_1 - s} = \int_0^A \varphi(\sigma) \frac{F(\sigma, s_1) - F(\sigma, s)}{s_1 - s}\, d\sigma\ .$$

Beachten wir nun, dass $F(\sigma, s)$ und $G(\sigma, s)$ nach unserer Voraussetzung *stetige* Functionen von s sind, und in der in (1.) angegebenen Beziehung zu einander stehen, so ergiebt sich nach bekanntem Satze:

$$\frac{F(\sigma, s_1) - F(\sigma, s)}{s_1 - s} = G(\sigma, s^*)\ ,$$

wo s^* einen unbekannten Mittelwerth zwischen s und s_1 vorstellt, der Art, dass entweder $s \leqq s^* \leqq s_1$ oder $s \geqq s^* \geqq s_1$ ist. Demgemäss kann man die Formel (*A.*) auch so schreiben:

†) Absichtlich beschränken wir uns nämlich bei Aufstellung dieser Hülfssätze auf solche Fälle, die weiterhin wirklich gebraucht werden.

$$\frac{J(s_1) - J(s)}{s_1 - s} = \int_0^A \varphi(\sigma)\, G(\sigma, s^*) d\sigma \ ,$$

oder, was dasselbe ist, auch so:

$$(B.) \quad \frac{J(s_1) - J(s)}{s_1 - s} - \int_0^A \varphi(\sigma) G(\sigma, s) d\sigma = \int_0^A \varphi(\sigma) [G(\sigma, s^*) - G(\sigma, s)] d\sigma \ .$$

Hieraus folgt sofort:

$$(C.) \quad \operatorname{abs}\left(\frac{J(s_1) - J(s)}{s_1 - s} - \int_0^A \varphi(\sigma) G(\sigma, s) d\sigma\right) \leqq \mathsf{M} \int_0^A \operatorname{abs}[G(\sigma, s^*) - G(\sigma, s)] d\sigma \ ,$$

wo M den absolut grössten Werth der Function $\varphi(\sigma)$ vorstellt.

Versteht man nun unter ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad, und unterwirft man, bei festgehaltenem s, das Argument s_1 der Bedingung

$$(D.) \quad \operatorname{abs}(s_1 - s) \leqq K \ ,$$

wo K eine positive Constante sein soll, so wird man durch gehörige Verkleinerung dieser Constante K dafür sorgen können, dass die rechte Seite der Formel (*C.*) für sämmtliche der Bedingung (*D.*) entsprechenden Werthe von s_1 kleiner als ε bleibt. Denkt man sich diese (bis jetzt noch unbewiesene) Behauptung als richtig constatirt, so ergiebt sich alsdann aus der Formel (*C.*) sofort, dass die Function $J(s)$ im Punkte s einen Differentialquotienten besitzt, und dass der Werth dieses Differentialquotienten durch das in (*C.*) auf der linken Seite stehende Integral dargestellt ist. Kurz, es ergiebt sich alsdann aus jener Formel (*C.*) die Richtigkeit des hier zu beweisenden ersten Satzes.

Um nun jene Behauptung als richtig zu constatiren, bemerken wir zuvörderst, dass die periodische Function $G(\sigma, s)$, zufolge unserer Voraussetzungen, in der σs-Ebene *allenthalben stetig* ist. Nach dem Heine-Lüroth'schen Satze muss daher eine positive Constante R von solcher Kleinheit existiren, dass die Werthdifferenz der Function $G(\sigma, s)$ für jedwedes R-Punktpaar†)

$$< \frac{\varepsilon}{\mathsf{M} A}$$

†) Unter einem *R-Punktpaar* verstehe ich irgend zwei Punkte (σ', s') und (σ'', s''), deren gegenseitiger Abstand $\leqq R$ ist. Man erhält also eine anschauliche Vorstellung eines solchen R-Punktpaares, wenn man sich zwei Punkte denkt, die

ist. Nehmen wir jetzt die so definirte Constante R an Stelle von K in der Bedingung ($D.$), und beachten wir, dass s^* stets zwischen s und s_1 liegt, so haben wir es alsdann nur noch mit solchen Argumenten s, s_1 und s^* zu thun, die den Formeln entsprechen:

$$\text{abs}\,(s_1 - s) \leqq R\,,$$

$$\text{abs}\,(s^* - s) \leqq R\,.$$

Aus der letzten Formel folgt sofort, dass die beiden Punkte (σ, s) und (σ, s^*), welchen Werth man dabei dem σ auch zuertheilen mag, stets ein R-Punktpaar bilden, dass mithin die Werthdifferenz der Function $G(\sigma, s)$ für diese beiden Punkte (σ, s) und (σ, s^*) stets $< \frac{\varepsilon}{\mathsf{M}\,A}$ ist. Um die Hauptsache hervorzuheben: Nimmt man für K die vorhin definirte Constante R, so wird stets die Relation stattfinden:

$$\text{abs}\,[G(\sigma, s^*) - G(\sigma, s)] < \frac{\varepsilon}{\mathsf{M}\,A}\,,$$

und es wird daher alsdann die rechte Seite der Formel ($C.$) stets $< \varepsilon$ sein. — *Q. e. d.*

Beweis des zweiten Satzes. — Es ist nachzuweisen, dass die Function

$$(L.) \qquad U(s) = \int_0^A \varphi(\sigma) G(\sigma, s)\, d\sigma$$

eine *stetige* Function von s ist.

Nun ergiebt sich aus ($L.$) ohne Weiteres:

$$(M.) \qquad U(s_1) - U(s) = \int_0^A \varphi(\sigma)\,[G(\sigma, s_1) - G(\sigma, s)]\, d\sigma\,,$$

mithin:

$$(N.) \qquad \text{abs}\,[U(s_1) - U(s)] \leqq \mathsf{M} \int_0^A \text{abs}\,[G(\sigma, s_1) - G(\sigma, s)]\, d\sigma\,,$$

wo wiederum M den absolut grössten Werth der Function $\varphi(\sigma)$ vorstellt.

---

durch einen biegsamen Faden von der Länge R an einander gefesselt, im Uebrigen aber von willkürlicher Lage sind. — Unter der *Werthdifferenz* der Function $G(\sigma, s)$ für ein solches R-Punktpaar ist, was wohl kaum noch der Erwähnung bedarf, die Differenz derjenigen beiden Werthe zu verstehen, welche die Function $G(\sigma, s)$ in dem einen und dem andern Punkte dieses Paares besitzt.

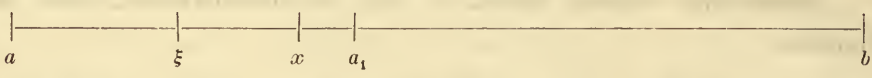
Ist nun ε ein beliebig gegebener Kleinheitsgrad, und unterwirft man, bei festgehaltenem s, das Argument s_1 der Bedingung:

$$\text{abs}\,(s_1 - s) \leqq K\,,$$

so kann man, ähnlich wie vorhin, diese Constante K so klein machen, dass die Differenz $G(\sigma, s_1) - G(\sigma, s)$, welchen Werth man dabei dem σ auch zuertheilen mag, ihrem absoluten Betrage nach stets $< \frac{\varepsilon}{MA}$ bleibt, und dass also die rechte Seite der Formel (*N.*) stets $< \varepsilon$ bleibt. — *Q. e. d.*

Dritter Satz. — *Es seien zwei Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gegeben, die auf der x-Axe in Erstreckung eines gegebenen Intervalls ab stetig sind. Ausserdem sei bekannt, dass die Function $\varphi(x)$ in jedem Punkte innerhalb ab den Differentialquotienten von $f(x)$ repräsentirt. — Alsdann wird solches auch der Fall sein in den beiden Endpunkten des Intervalls, d. i. in a und in b.*

Beweis. — Markirt man irgendwo *innerhalb* ab einen Punkt a_1, und sodann irgendwo *innerhalb* aa_1 einen Punkt x, so muss, zufolge der gemachten Voraussetzungen,



innerhalb ax ein Punkt ξ existiren, welcher der Formel entspricht:

$$(p.) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(\xi)\,;$$

wie sich solches aus bekannten Sätzen*) leicht ergiebt.

Es sei nun ε ein beliebig gegebener Kleinheitsgrad, und man denke sich, was zufolge der gemachten Voraussetzungen stets möglich ist, den Punkt a_1 so nahe an a gelegen, dass die Schwankung der Function $\varphi(x)$ in Erstreckung des Intervalls aa_1 kleiner als ε ist. Alsdann geht die Formel $(p.)$ über in:

$$(q.) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(a) + \Theta\varepsilon\,,$$

wo Θ einen unbekannten echten Bruch vorstellt. Diese für jeden Punkt x *innerhalb* aa_1 gültige Formel $(q.)$ zeigt aber sofort, dass $\varphi(a)$ der Differentialquotient von $f(x)$ im Punkte a ist. — *Q. e. d.*

*) Man vgl. z. B. das Werk von TANNERY: *Introduction a la Théorie des Fonctions*, Paris 1886, pag. 232.

§ 13.

Ein wichtiges Theorem, das durch die Methode des arithmetischen Mittels für die Ableitungen der Fundamentalfunctionen sich ergiebt.

Wir beginnen mit einem bereits früher bewiesenen Satze [vgl. Abh. 1, pag. 77 — 79, sowie auch die dortige zweite Bemerkung auf pag. 115]. Beschränken wir uns dabei, was nur der Einfachheit willen geschieht, auf den Fall, dass die Curve *keine* Ecken hat, so lautet jener Satz folgendermassen:

Hauptsatz. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function der Bogenlänge* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(1.) θ *und* f *stetige Functionen von* σ *sind, und dass* θ' *überall* $\geqq 0$ *ist,*

so existiren stets zwei den Werthen f *entsprechende Fundamentalfunctionen* Φ *und* Ψ *der Gebiete* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{J}$, *d. h. zwei Fundamentalfunctionen* Φ *und* Ψ *dieser Gebiete, deren Randwerthe mit jenen Werthen* f *identisch sind. Diese Functionen sind wirklich construirbar. Und zwar ist hinsichtlich ihrer Construction Dreierlei zu bemerken:*

I. — *Denkt man sich von* f *aus der Reihe nach die Functionen gebildet:*

$$f_s^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_s\,,$$

(2.) $$f_s^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int f^{(1)}(d\sigma)_s\,,$$

$$f_s^{(3)} = \frac{1}{\pi}\int f^{(2)}(d\sigma)_s\,,$$

etc. etc.,

so werden diese $f_s^{(n)}$ *für* $n = \infty$ *gegen eine bestimmte endliche Constante* C *convergiren.*

II. — Setzt man sodann:

(3.) $$\xi = +(C - f) + (C - f^{(1)}) + (C - f^{(2)}) + + \cdots,$$
$$\eta = -(C - f) + (C - f^{(1)}) - (C - f^{(2)}) + - \cdots,$$

so werden diese Reihen stets convergent, und die durch sie definirten Functionen ξ, η *stetige Functionen der Bogenlänge sein**).

*) In Betreff der Formeln (2.), (3.) sei Folgendes bemerkt: Sind auf der ge-

III. — *Mittelst der Constante C und der Functionen ξ, η sind nun endlich jene Fundamentalfunctionen Φ und Ψ für jeden Punkt a innerhalb $\mathfrak{A}$, und für jeden Punkt j innerhalb $\mathfrak{I}$ folgendermassen darstellbar:*

$$\Phi_a = C + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_a \,,$$

$$\Psi_j = C + \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_j \,. \tag{4.}$$

Es werden also z. B. für jedweden Curvenpunkt s die Convergenzwerthe Φ_{as} und Ψ_{js} mit dem in s vorgeschriebenem Werthe f_s identisch sein.

Bemerkung. — Dass dieser Satz bei unsern gegenwärtigen Betrachtungen d. h. für die von uns *determinirten* Curven (pag. 4) ein absolut strenger ist, geht hervor aus unseren früheren Erörterungen (pag. 22—25).

Aus den Formeln pag. 24 ergiebt sich mit Rücksicht auf die gegenwärtigen Voraussetzungen (1.) sofort:

$$\int (d\sigma)_s = \pi \,, \tag{5.}$$

sodass man also die Formeln (2.) auch so schreiben kann:

(6.)

	I.	II.
$C - f_s^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int (C - f)(d\sigma)_s \,,$	$+1$	$+1$
$C - f_s^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int (C - f^{(1)})(d\sigma)_s \,,$	$+1$	-1
$C - f_s^{(3)} = \frac{1}{\pi}\int (C - f^{(2)})(d\sigma)_s \,,$	$+1$	$+1$
$C - f_s^{(4)} = \frac{1}{\pi}\int (C - f^{(3)})(d\sigma)_s \,,$	$+1$	-1
etc. etc.	etc.	etc.

---

gebenen Curve irgend zwei Punkte mit den Bogenlängen σ und s markirt, so bezeichnen wir die Werthe, welche die Function f in diesen beiden Punkten besitzt, mit $f(\sigma)$ und $f(s)$, oder auch mit f_σ und f_s. Und häufig werden wir dabei statt f_σ auch das *nackte* f schreiben. Ebenso verfahren wir bei allen andern Functionen der Bogenlänge, bei $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc., bei ξ, η, etc. Es ist also z. B.

$$\begin{cases} f_\sigma = f(\sigma) = f \,, \\ f_s = f(s) \,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_\sigma = \xi(\sigma) = \xi \,, \\ \xi_s = \xi(s) \,. \end{cases}$$

Demgemäss sind in (2.) unter f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc. die Werthe dieser Functionen im Punkte σ, d. i. an der Stelle des Curvenelementes $d\sigma$ zu verstehen; während die daselbst *linker* Hand befindlichen f_s, $f_s^{(1)}$, $f_s^{(2)}$, etc. dem Punkte s zugehören.

wo C dieselbe Constante sein soll, wie in (3.) und (4.). Multiplicirt man diese Gleichungen einmal mit den Factoren I., das andere Mal mit den Factoren II., und addirt jedesmal, so erhält man, mit Rücksicht auf (3.), die erste und zweite der folgenden beiden Formeln:

$$\begin{aligned} \xi_s - (C - f_s) &= + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_s \,, \\ \eta_s + (C - f_s) &= - \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_s \,. \end{aligned} \tag{7.}$$

Zieht man nun von s aus zwei Strahlen nach den Punkten σ und $\sigma + d\sigma$, und bezeichnet man die Azimuthe dieser beiden Strahlen gegen die x-Axe mit γ und $\gamma + d\gamma$, so ist offenbar: $(d\sigma)_s = d\gamma$, oder genauer ausgedrückt:

$$(d\sigma)_s = \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} d\sigma \,,$$

sodass man also die Formeln (7.) auch so schreiben kann:

$$\begin{aligned} \xi_s - (C - f_s) &= + \frac{1}{\pi}\int \xi \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} d\sigma \,, \\ \eta_s + (C - f_s) &= - \frac{1}{\pi}\int \eta \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} d\sigma \,. \end{aligned} \tag{8.}$$

Lassen wir jetzt zu den Voraussetzungen (1.) noch die hinzutreten, dass θ' und θ'', ebenso wie θ selber, *stetige* Functionen der Bogenlänge σ sein sollen, so werden (zweiter Satz pag. 65) die Grössen

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma \partial s} \tag{9.}$$

Functionen von (σ, s) sein, die in der σs-Ebene allenthalben *stetig* sind. Beachten wir aber dies, und beachten wir ausserdem [vgl. (3.)], dass ξ und η *stetige* Functionen von σ sind, so ergiebt sich, auf Grund der Sätze pag. 73, aus den Formeln (8.) Dreierlei, nämlich erstens, dass die Functionen

$$\xi_s - (C - f_s) \quad \text{und} \quad \eta_s + (C - f_s)$$

nach der Bogenlänge s differenzirbar sind, ferner zweitens, dass diese Differentialquotienten die Werthe haben:

$$\begin{aligned} \frac{d(\xi_s + f_s)}{ds} &= + \frac{1}{\pi}\int \xi \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma \, \partial s} d\sigma \,, \\ \frac{d(\eta_s - f_s)}{ds} &= - \frac{1}{\pi}\int \eta \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma \, \partial s} d\sigma \,, \end{aligned} \tag{10.}$$

und endlich drittens, dass diese Differentialquotienten *stetige* Functionen von s sind. Also folgender

Erster Zusatz. — *Hält man fest an den Vorstellungen und Bezeichnungen des Hauptsatzes* (pag. 77), *indem man zu den dortigen Voraussetzungen noch die hinzufügt, dass*

(11.) *$0'$ und $0''$, ebenso wie 0 selber, stetige Functionen der Bogenlänge σ sein sollen,*

*so wird, als Folge hiervon, zu der schon früher vorhandenen Stetigkeit von ξ, η noch die Existenz und Stetigkeit der Differentialquotienten**):

$$\text{(12.)} \qquad \frac{d(\xi + f)}{d\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{d(\eta - f)}{d\sigma}$$

hinzutreten. Dabei aber bleibt die Existenz und Stetigkeit von $\frac{d\xi}{d\sigma}$ und $\frac{d\eta}{d\sigma}$ ebenso fraglich, wie die Existenz und Stetigkeit von $\frac{df}{d\sigma}$.

Fügt man jetzt zu den schon gemachten Voraussetzungen noch die hinzu, dass der Differentialquotient $f' = \frac{df}{d\sigma}$ *existirt*, und dass derselbe eine *stetige* Function von σ ist, so ergiebt sich auf Grund des Satzes (12.) sofort, dass $\frac{d\xi}{d\sigma}$ und $\frac{d\eta}{d\sigma}$ ebenfalls existiren, und ebenfalls stetige Functionen von σ sind; sodass man also alsdann den Formeln (10.) die Gestalt geben darf:

$$\frac{d(\xi_s + f_s)}{ds} = + \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\xi\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right) d\sigma - \frac{1}{\pi}\int \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\, d\sigma\,,$$

$$\frac{d(\eta_s - f_s)}{ds} = - \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\eta\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right) d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\, d\sigma\,.$$

Diese Formeln aber reduciren sich, weil die Grössen

$$\xi\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \quad \eta\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\xi\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\eta\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right),$$

ebenso wie ξ, η, $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d\eta}{d\sigma}$ und die Ausdrücke (9.), periodische und stetige Functionen von σ sind, auf folgende:

---

*) Vgl. die Note pag. 77, 78.

$$(13.)\qquad \begin{aligned} \frac{d(\xi_s + f_s)}{ds} &= -\frac{1}{\pi}\int \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\,d\sigma\,, \\ \frac{d(\eta_s - f_s)}{ds} &= +\frac{1}{\pi}\int \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\,d\sigma\,. \end{aligned}$$

An diese Formeln (13.) schliessen sich analoge Folgerungen wie vorhin an die Formeln (8.). In der That ergiebt sich aus den Formeln (13.), und zwar wiederum auf Grund der Sätze pag. 73, Dreierlei, nämlich erstens, dass die Ausdrücke

$$\frac{d(\xi_s + f_s)}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d(\eta_s - f_s)}{ds}$$

nach der Bogenlänge s differenzirbar sind; ferner zweitens, dass diese Differentialquotienten die Werthe haben:

$$(14.)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2(\xi_s + f_s)}{ds^2} &= -\frac{1}{\pi}\int \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\,d\sigma\,, \\ \frac{d^2(\eta_s - f_s)}{ds^2} &= +\frac{1}{\pi}\int \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\,d\sigma\,; \end{aligned}$$

und endlich drittens, dass diese Differentialquotienten *stetige* Functionen von s sind. Also folgender

Zweiter Zusatz. — *Fügt man zu den im Hauptsatze und im ersten Zusatze gemachten Voraussetzungen noch die hinzu, dass*

$$(15.)\qquad \begin{aligned} &\text{der Differentialquotient } f' = \frac{df}{d\sigma} \text{ existirt, und dass der-} \\ &\text{selbe eine stetige Function von } \sigma \text{ ist,} \end{aligned}$$

so tritt, als Folge hiervon, zur Existenz und Stetigkeit von ξ, η auch noch die Existenz und Stetigkeit von

$$(16.)\qquad \frac{d\xi}{d\sigma}\,,\ \frac{d\eta}{d\sigma}\,,\ \frac{d^2(\xi + f)}{d\sigma^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2(\eta - f)}{d\sigma^2}$$

hinzu. Dabei aber bleibt die Existenz von $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}$ und $\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}$ ebenso fraglich, wie die von $\frac{d^2 f}{d\sigma^2}$.

Fügt man schliesslich zu den bis jetzt gemachten Voraussetzungen (1.), (11.), (15.) noch die hinzu, dass der Differentialquotient $f'' = \frac{d^2 f}{d\sigma^2}$ *existiren*, und eine *abtheilungsweis stetige* Function von σ sein soll, so hat man alsdann in Betreff der Functionen θ und f im Ganzen folgende Voraussetzungen:

$$(P.)\qquad \begin{cases} \theta,\ \theta',\ \theta'' \text{ stetig, und } \theta' \text{ überall } \geqq 0\,, \\ f,\ f' \text{ stetig, und } f'' \text{ abtheilungweise stetig;} \end{cases}$$

und in Betreff der Functionen ξ, η folgende Resultate:

(*R.*) ξ, η, ξ', η' stetig, und ξ'' η'' abtheilungsweis stetig*).

Aus diesen Resultaten (*R.*) folgt nun aber sofort, dass die in (4.) genannten Fundamentalfunctionen

$$\Phi_a = C + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_a ,$$

$$\Psi_j = C + \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_j$$

dem Theorem $W\beta.$, (pag. 49) sich subordiniren, so dass man also zu folgendem wichtigen Satze gelangt:

Theorem**). — *Ist längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(17.) *θ, θ', θ'' und f, f' stetige Functionen von σ sind, dass ferner f'' eine abtheilungsweis stetige Function von σ ist, und dass endlich θ' überall $\geqq 0$ ist,*

so werden die jenen Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ nicht allein existiren, sondern zugleich auch von solcher Beschaffenheit sein, dass die vier Ausdrücke

(18.) $$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_a , \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_a \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_j , \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_j ,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, wiederum vier theils zu $\mathfrak{A}$ theils zu $\mathfrak{J}$ gehörige Fundamentalfunctionen repräsentiren.

Uebrigens kann man diesem Theorem, welches die Grundlage der weiteren Untersuchungen bildet, wie man leicht übersieht, auch folgende, vielleicht noch etwas durchsichtigere Fassung geben:

Andere Form des Theorems. — *Sind die Voraussetzungen* (17.) *erfüllt, so existiren drei Fundamentalfunctionen Φ, Φ_1, Φ_2 des Gebietes $\mathfrak{A}$, von denen die erste die vorgeschriebenen Randwerthe f*

*) In der That ergeben sich diese Resultate ohne Weiteres aus dem letzten Zusatze, falls man nur beachtet, dass die Differentiationen nach σ augenblicklich durch *Accente* angedeutet sind.

**) Dieses wichtige Theorem wurde bereits vor zehn Jahren vom Verf. ohne Beweis mitgetheilt in den Ber. d. Kgl. Sächs. G. d. W., 1878, pag. 50 u. 52. Man vgl. auch die Math. Ann., Bd. 16, pag. 428.

besitzt, während gleichzeitig für jedweden von der Curve getrennten Punkt $a(x, y)$ die Relationen stattfinden:

$$(19.) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_1 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_2 . \quad (!)$$

Desgleichen werden alsdann drei Fundamentalfunctionen Ψ, Ψ_1, Ψ_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren, die für jedweden von der Curve getrennten Punkt $j(x, y)$ den Relationen entsprechen

$$(20.) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi_1 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi_2 , \quad (!)$$

und von denen die erste, nämlich Ψ, die vorgeschriebenen Randwerthe f besitzt.

Die Formeln (19.), (20.) beziehen sich, wie durch das Zeichen (!) angedeutet ist, nur auf solche Punkte, die von der Curve durch irgend welchen, wenn auch noch so kleinen, Zwischenraum *getrennt* sind. Und es bleibt also bei dem vorstehenden Theorem die Existenz und Beschaffenheit der Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ für solche Punkte, die *auf* der Curve liegen, völlig dahingestellt.

Uebrigens lässt sich leicht zeigen, dass die genannten Ableitungen, wenn auch die Voraussetzungen (17.) erfüllt sind, in einzelnen Punkten der gegebenen Curve *nicht* existiren. Ist z. B. die Curve ein Kreis, und denkt man sich an diesen Kreis eine Tangente L gelegt, parallel der x-Axe, so wird die Function Ψ (die Fundamentalfunction des *innern* Gebietes) längs der Linie L nur in einem einzigen Punkte, nämlich nur im Berührungspunkte definirt sein. Folglich wird der Differentialquotient $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ in diesem Berührungspunkte *nicht* existiren; so dass also dieses $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, auf den Berührungspunkt angewendet, ein leeres Zeichen sein würde, ohne irgend welchen Sinn. U. s. w.

§ 14.

Weitere Sätze über die Ableitungen der Fundamentalfunctionen.

Die durch die letzten Worte des vorigen Paragraphs angeregten Fragen finden, insoweit sie das innere Gebiet $\mathfrak{J}$ betreffen, ihre Beantwortung durch folgende Sätze:

Erster Satz. — *Es mag vorausgesetzt sein, dass für das von der gegebenen Curve umschlossene Gebiet* $\mathfrak{F}$

(1.) *drei Fundamentalfunctionen* U, U_1, U_2 *existiren, welche in jedwedem Punkte* (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{F}$ *den Relationen entsprechen:*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 . \quad (!)$$

Alsdann wird für jeden Punkt p *innerhalb* $\mathfrak{F}$ *und für jede von* p *ausgehende Richtung* r *die Formel stattfinden:*

$$\frac{dU}{dr} = U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma , \tag{2.}$$

wo γ *das Azimuth der Richtung* r *gegen die* x*-Axe vorstellt.*

Und diese Formel (2.) *wird auch dann noch gültig sein, wenn* p *am Rande von* $\mathfrak{F}$ *liegt, vorausgesetzt, dass man zur Richtung* r *ein dem Gebiete* $\mathfrak{F}$ *angehörendes Linienelement* pq *wählt, welches mit dem Rande von* $\mathfrak{F}$ *nur allein den Punkt* p *gemein hat. Dabei bleibt es übrigens gleichgültig, ob dieses Linienelement* pq *in* p *mit dem Rande irgend welchen Winkel macht, oder ob es den Rand daselbst tangirt.*

Zweiter Satz. — *Fügt man zur Voraussetzung* (1.) *noch die hinzu, dass*

(3.) *θ und θ' stetige Functionen der Bogenlänge σ sind,*

so wird die Function U *in jedwedem Randpunkte* p *einen Differentialquotienten nach der Bogenlänge besitzen. Und zwar wird derselbe den Werth haben:*

$$\frac{dU}{d\sigma} = U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta , \tag{4.}$$

wo θ *das Azimuth der in* p *an die Curve gelegten Tangente gegen die* x*-Axe vorstellt.*

Beweis des ersten Satzes. — Für *innere* Punkte p bedarf die Richtigkeit des Satzes keiner Erläuterung. Von hier aus aber gelangt man alsdann zur Constatirung des Satzes für irgend einen *Rand*punkt p durch Anwendung des auf pag. 76 bewiesenen Hülfssatzes.

Beweis des zweiten Satzes. — Für die Randcurve von $\mathfrak{F}$ gelten die Gleichungen [(*B.*), (*C.*) pag. 3]:

$$(\alpha.) \quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{F}(\sigma) , \\ \eta = \mathfrak{G}(\sigma) , \end{cases} \qquad (\beta.) \quad \begin{cases} \xi' = \cos\theta , \\ \eta' = \sin\theta ; \end{cases}$$

so dass also ξ, η und θ gegebene Functionen von σ sind. Setzt man aus diesen Functionen, unter Hinzunahme irgend einer positiven Constante A, die beiden Ausdrücke zusammen:

$$(\gamma.) \qquad \begin{cases} x = \xi - A \sin\theta \ , \\ y = \eta + A \cos\theta \ , \end{cases}$$

so sind die so definirten Grössen x, y gleichfalls gegebene Functionen von σ. Ebenso wie nun die beiden Formeln ($\alpha.$) die simultanen Gleichungen der *Randcurve* vorstellen, ebenso werden die beiden Formeln ($\gamma.$) die simultanen Gleichungen einer gewissen *Parallelcurve* sein, nämlich einer Curve, die, innerhalb $\mathfrak{F}$ liegend, jene Randcurve im constanten Abstande A begleitet. Aus ($\gamma.$) und mit Rücksicht auf ($\beta.$) ergiebt sich:

$$(\delta.) \qquad \begin{cases} dx = (1 - A\theta')\cos\theta \, d\sigma \ , \\ dy = (1 - A\theta')\sin\theta \, d\sigma \ , \quad \text{mithin:} \quad dx : dy = \cos\theta : \sin\theta \ ; \end{cases}$$

wodurch bestätigt wird, dass die neue Curve der Randcurve parallel ist.

Nach unserer Voraussetzung (3.) sind θ, θ' *stetig*, mithin auch durchweg *endlich*. Demgemäss wird man die positive Constante A so klein machen können, dass die Differenz $(1 - A\theta')$ durchweg > 0 ist. Alsdann aber erhält man aus ($\delta.$) für das dem Randelement $d\sigma$ correspondirende Element ds der Parallelcurve die Formel:

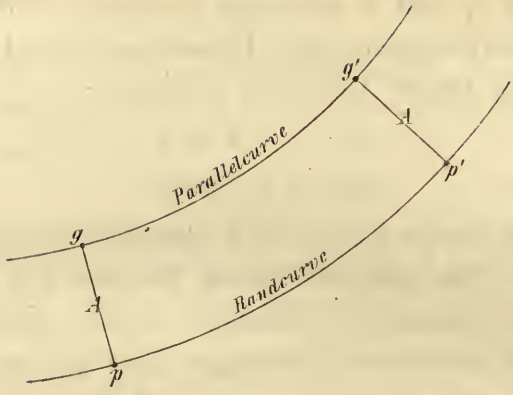
$$(\varepsilon.) \qquad ds = (1 - A\theta')\, d\sigma \ .$$

Errichten wir nun (vgl. die folgende Figur) in irgend zwei Randpunkten p und p' die jene Parallelcurve in den Punkten g und g' erreichenden Normalen pg und $p'g'$, und bezeichnen wir sodann irgend ein Element der gebrochenen Linie $pgg'p'$ mit ds, so ist zufolge des ersten Satzes:

$$\frac{dU}{ds} = U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma \ ,$$

wo γ das Azimuth des Elementes ds gegen die x-Axe vorstellt. Integrirt man diese Formel über sämmtliche Elemente ds jener gebrochenen Linie, so folgt*):

*) Es ist im Auge zu behalten, dass U, U_1, U_2 (als Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{F}$) in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{F}$ *stetig* sind.



$$U' - U = \int_{p g g' p'} (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma)\, ds \ ,$$

wo U und U' die Werthe in p und p' vorstellen. Die den Perpendikeln $(pg) = A$ und $(g'p') = A$ entsprechenden Integraltheile sind, einzeln genommen, $\leqq 2MA$, falls man nämlich unter M den absolut grössten Werth der Functionen U, U_1, U_2 in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{S}$ versteht. Somit folgt:

$$U' - U = \Theta \,.\, 4MA + \int_{gg'} (\bar{U}_1 \cos\gamma + \bar{U}_2 \sin\gamma)\, ds \ ,$$

wo Θ einen echten Bruch vorstellt, und wo die horizontalen Ueberstreichungen hervorheben sollen, dass die betreffenden Werthe der Parallelcurve angehören. Die letzte Formel ist mit Rücksicht auf (ε.) auch so darstellbar:

$$U' - U = \Theta \,.\, 4MA + \int_{gg'} (\bar{U}_1 \cos\gamma + \bar{U}_2 \sin\gamma)\,(1 - A\theta')\, d\sigma \ ,$$

also, mit Rücksicht auf die für M gegebene Definition, auch so:

$$U' - U = \Theta \,.\, 4MA + \Theta_1\, 2mMA(pp') + \int_{gg'} (\bar{U}_1 \cos\gamma + \bar{U}_2 \sin\gamma)\, d\sigma \ ,$$

wo m den absolut grössten Werth von θ', und (pp') die *Länge* der Randstrecke pp' bezeichnet, während Θ_1 wiederum einen echten Bruch vorstellt.

Subtrahirt man von der letzten Formel das über die Randstrecke pp' erstreckte Integral*):

$$(\zeta.) \qquad J = \int_{pp'} (U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta)\, d\sigma \ ,$$

*) Das θ soll hier das Azimuth des Randelementes $d\sigma$ gegen die x-Axe vorstellen.

und beachtet man dabei, dass die dem Rande und der Parallelcurve zugehörigen Azimuthe θ und γ in je zwei einander correspondirenden Punkten *gleich gross* sind, so erhält man:

$$(\eta.)\quad (U'-U)-J=4MA\left(\Theta+\Theta_1\frac{m(pp')}{2}\right)+\int_{gg'}\Big((\overline{U}_1-U_1)\cos\theta+(\overline{U}_2-U_2)\sin\theta\Big)d\sigma,$$

wo U_1 und $\overline{U}_1$ die Werthe der Function U_1 in je zwei correspondirenden Punkten der Randcurve und der Parallelcurve vorstellen, und Analoges gilt von U_2 und $\overline{U}_2$.

Sind p und p' gegeben, so haben in $(\eta.)$ die auf der *linken* Seite stehenden U, U', J völlig bestimmte feste Werthe, während die *rechte* Seite der Formel alsdann noch eine Constante A enthält, die wir nach Belieben verkleinern dürfen. Ist nun irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben, so können wir durch Verkleinerung von A zunächst dafür sorgen, dass der *erste* Theil der rechten Seite $< \frac{\varepsilon}{2}$ wird, sodann aber durch weitere Verkleinerung von A dafür sorgen, dass der *zweite* Theil der rechten Seite (d. i. das Integral) ebenfalls $< \frac{\varepsilon}{2}$ wird†). Somit ergiebt sich, dass die *linke* Seite der Formel $(\eta.)$ nothwendig $= 0$ ist. Wir erhalten daher $U' - U = J$, oder mit Rückblick auf $(\zeta.)$:

$$(\vartheta.)\qquad U' - U = \int_{pp'} (U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta)\, d\sigma\ .$$

Nachdem diese Formel constatirt ist für jede beliebige Randstrecke pp', wollen wir jetzt irgend einen Kleinheitsgrad ε uns gegeben denken, und vom Randpunkte p aus (vgl. die folgende Figur) eine Randstrecke pq auftragen von solcher Kleinheit, dass die Schwankungen der Function

$$(\iota.)\qquad U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta$$

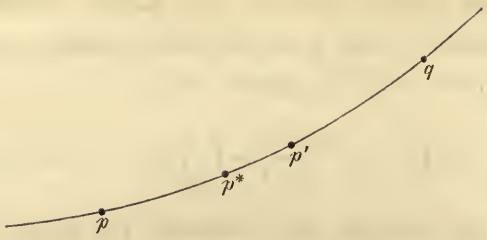
längs pq weniger als ε betragen. Bringen wir alsdann die Formel $(\vartheta.)$ auf einen *beliebigen Theil* pp' dieser Strecke pq in Anwendung, so erhalten wir sofort:

$$U' - U = (U_1^* \cos\theta^* + U_2^* \sin\theta^*)\int_{pp'} d\sigma$$

d. i.

$$(\varkappa.)\qquad \frac{U' - U}{(pp')} = U_1^* \cos\theta^* + U_2^* \sin\theta^*\ ,$$

†) Vgl. die Note pag. 85.



wo die mit einem Stern versehenen Buchstaben die Werthe der betreffenden Functionen in einem unbekannten Randpunkte p^* zwischen p und p' vorstellen, während (pp') die Länge der Strecke pp' bezeichnet. Zufolge der Festsetzung (ι.) weicht der in ($\varkappa$.) auf der rechten Seite vorhandene zu p^* gehörige Werth von dem analogen zu p gehörigen Werthe $U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta$ um weniger als ε ab. Somit folgt aus ($\varkappa$.) sofort:

$$(\lambda.) \qquad \frac{U' - U}{(pp')} = (U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta) + \Theta\varepsilon \ ,$$

wo Θ einen echten Bruch bezeichnet. Ist also irgend ein Kleinheitsgrad ε und überdies der Punkt p gegeben, so kann q so nahe an p gelegt werden, dass für jedweden der Randstrecke pq angehörigen Punkt p' die Formel stattfindet:

$$(\mu.) \qquad \operatorname{abs}\left(\frac{U' - U}{(pp')} - (U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta)\right) < \varepsilon \ . \quad - \quad Q.\ e.\ d.$$

Zu den soeben bewiesenen Sätzen fügen wir noch folgenden hinzu, der von hervorragender Wichtigkeit ist für unsere weiteren Untersuchungen.

Dritter Satz. — *Die gegebene geschlossene Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass*

(5.) θ, θ' *stetige Functionen der Bogenlänge* σ *sind.*

Ueberdies sei vorausgesetzt, dass für das von dieser Curve umschlossene Gebiet $\mathfrak{F}$ *drei Fundamentalfunctionen* U, U_1, U_2 *existiren, die in jedwedem Punkte* (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{F}$ *den Formeln entsprechen:*

$$(6.) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = U_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 \ . \quad (!)$$

Markirt man nun einen beliebigen Punkt p *des Gebietes* $\mathfrak{F}$ — *einerlei ob derselbe innerhalb* $\mathfrak{F}$ *oder am Rande von* $\mathfrak{F}$ *liegt* — *und*

versteht man unter ε einen willkürlich gegebenen Kleinheitsgrad, so wird man um p, als Centrum, stets einen Kreis von solcher Kleinheit beschreiben können, dass für alle zu $\mathfrak{F}$ gehörigen und innerhalb dieses Kreises befindlichen Punkte p' die Formel stattfindet:

$$(7.) \qquad \operatorname{abs}\left(\frac{U'-U}{(pp')} - (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma)\right) < \varepsilon \ ,$$

wo (pp') die Länge der von p und p' begrenzten geraden Linie, und γ das Azimuth dieser Linie gegen die x-Axe vorstellt. Dabei bezeichnet U' den Werth in p', während U selber, sowie auch U_1 und U_2, die Werthe der betreffenden Functionen in p vorstellen.

Beweis des Satzes für innere Punkte. — Liegt p *innerhalb* $\mathfrak{F}$, so kann der Kreis gleich von Anfang so klein gedacht werden, dass er ebenfalls völlig *innerhalb* $\mathfrak{F}$ liegt. Sodann aber können wir durch weitere Verkleinerung des Kreisradius dafür sorgen, dass die Schwankungen der Functionen

$$(a.) \qquad U,\ U_1,\ U_2$$

innerhalb des Kreises durchweg $< \frac{\varepsilon}{2}$ sind, wo ε den gegebenen Kleinheitsgrad vorstellt. Markiren wir jetzt innerhalb des Kreises einen beliebigen Punkt p', und bezeichnen wir die gerade Linie pp' mit r, und irgend ein Element derselben mit dr, so ist nach dem ersten Satze (pag. 84):

$$\frac{dU}{dr} = U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma \ ,$$

wo γ das Azimuth der Linie $r = (pp')$ vorstellt. Hieraus folgt durch Integration über alle Elemente dr dieser Linie:

$$U' - U = \int_{pp'} (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma)\, dr \ ,$$

d. i.

$$U' - U = (U_1^* \cos\gamma + U_2^* \sin\gamma) \int_{pp'} dr \ ,$$

d. i.

$$\frac{U'-U}{(pp')} = U_1^* \cos\gamma + U_2^* \sin\gamma \ ,$$

wo U und U' die Werthe von U in p und p' vorstellen, während die mit einem Stern versehenen Buchstaben die Werthe der betreffenden Functionen in einem unbekannten Punkte p^* zwischen p

und p' repräsentiren. Zufolge der Festsetzung ($a.$) ist nun aber die letzte Formel auch so darstellbar:

$$(b.) \qquad \frac{U' - U}{(pp')} = (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma) + \Theta\varepsilon \ ,$$

wo alsdann U_1 und U_2 die Werthe in p bezeichnen, und Θ ein echter Bruch ist. — *Q. e. d.*

Beweis des Satzes für die Randpunkte. — Liegt der zu betrachtende Punkt p *am Rande* von $\mathfrak{F}$, so beschreibe man, nachdem zuvor ein beliebiger Kleinheitsgrad

$$(A.) \qquad \varepsilon_0 < 1$$

gegeben ist, um p, als Centrum, einen Kreis von solcher Kleinheit, dass die Schwankungen der Functionen U, U_1, U_2 innerhalb dieses Kreises

$$(B.) \qquad < \frac{M\varepsilon_0}{4}$$

sind, wo M (ebenso wie früher) den absolut grössten Werth von U, U_1, U_2 in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{F}$ vorstellen soll. Sodann sorge man durch noch weitere Verkleinerung des Kreisradius dafür, dass der innerhalb des Kreises befindliche Theil des *Randes**) aus einem einzigen Stück besteht, und auch dafür, dass die Schwankungen von θ für diesen Theil des Randes $< \frac{\varepsilon_0}{2}$ sind; so dass also sämmtliche Tangenten dieses Randtheiles in ihren Richtungen um weniger als

$$(C.) \qquad \frac{\varepsilon_0}{2}$$

von einander abweichen.

Innerhalb des so definirten Kreises markire man nun einen *beliebigen* zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Punkt p'. In Betreff der von p und p' begrenzten geraden Linie $r = (pp')$ sind alsdann sehr verschiedene Fälle denkbar. Entweder wird sie, ausser p selber, keinen weitern Punkt mit dem Rande gemein haben. Oder sie wird den Rand zwischen p und p' irgend welche Anzahl von Malen schneiden resp. berühren. Dabei kann sie möglicherweise auch den Punkt p' mit dem Rande gemein haben; denn es kann ja jener innerhalb des

*) Unter dem *Rande* ist stets der Rand von $\mathfrak{F}$, das ist die von Hause aus gegebene geschlossene Curve, zu verstehen.

Kreises markirte, zu $\mathfrak{J}$ gehörige Punkt p' möglicherweise ein Randpunkt von $\mathfrak{J}$ sein. All' diese Fälle zusammenfassend, bezeichnen wir mit q den *letzten* Punkt, den die Linie $r = (pp')$, von p aus gerechnet, mit dem Rande gemein hat, und ferner mit $s = (pp')$ diejenige *Curve*, welche von p bis q *längs des Randes* fortgeht, sodann aber von q aus *geradlinig* nach p' geht. Aus dieser Definition der Curve $s = (pp')$ ergiebt sich mit Rücksicht auf (*C.*), dass die einzelnen Elemente ds dieser Curve gegen die gerade Linie $r = (pp')$ unter Winkeln geneigt sind, die durchweg $< \frac{\varepsilon_0}{2}$ sind. Bezeichnet man also den Neigungswinkel eines solchen Elementes ds gegen die Linie r mit 2δ, so ist stets:

(*D.*) $$\text{abs}\,\delta < \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{1}{4}\,; \quad [\text{vgl. } (A.)]\ .$$

Zur Erläuterung des soeben Gesagten dürfte es angemessen sein, im Ganzen zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Die gerade Linie $r = (pp')$ hat, ausser p selber, keinen weiteren Punkt mit dem Rande gemein. Alsdann wird jener Punkt q identisch sein mit p selber, folglich die Curve s *identisch* sein mit r; so dass also in diesem Falle jene mit 2δ bezeichneten Neigungswinkel durchweg $= 0$ sind:

(α.) $$\delta = 0\ .$$

Zweiter Fall: Die gerade Linie $r = (pp')$ hat, ausser p selber, noch irgend welche Anzahl anderer Punkte mit dem Rande gemein. Alsdann wird, von p aus gerechnet, der *letzte* dieser Punkte mit q zu bezeichnen sein. Und die Curve s wird in diesem Falle also aus zwei Theilen s_1 und s_2 zusammengesetzt sein:

$$s_1 = (pq), \qquad s_2 = (qp');$$

der Art, dass s_1 durch die *Randstrecke* (pq), s_2 aber durch die *gerade Linie* (qp') dargestellt ist. Die Linie r geht von p aus, und durch q hindurch, während die Curve s_1 ebenfalls von p nach q geht. Folglich wird die Linie r parallel sein mit einer gewissen *Tangente* der Curve s_1. Zufolge (*C.*) wird nun jedwedes Element ds_1, seiner Richtung nach, von dieser Tangente, d. i. von der Richtung der Linie r um weniger als $\frac{\varepsilon_0}{2}$ abweichen. Andererseits aber wird jedwedes Element ds_2 in die gerade Linie $r = (pqp')$ hineinfallen, also mit dieser Linie r den Winkel 0 machen. Somit sehen wir, dass *sämmtliche* Elemente ds (sowohl die ds_1, wie auch die ds_2) gegen die Linie r unter Winkeln geneigt sind, die $< \frac{\varepsilon_0}{2}$ sind. Bezeichnen wir also diese Neigungswinkel mit 2δ, so ergiebt sich:

$$(\beta.) \qquad \text{abs } \delta < \frac{\varepsilon_0}{4} \ .$$

Dem hier betrachteten zweiten Falle subsumirt sich offenbar auch z. B. *der* Fall, dass p' ein *Randpunkt* von $\mathfrak{F}$ ist. In diesem letzteren Falle gestalten sich die Dinge nur dadurch ein wenig specieller, dass q identisch wird mit p', dass mithin s_2 verschwindet, und s_1 identisch wird mit s.

Zusammenfassung. — Die erhaltenen Resultate ($\alpha.$) und ($\beta.$) zeigen, dass die oben angegebene Formel ($D.$) ganz allgemein gilt. — *Q. e. d.*

Für jedes Element ds der Curve $s = (pp')$ gilt, zufolge des ersten und zweiten Satzes (pag. 84), die Formel:

$$(E.) \qquad \frac{dU}{ds} = U_1 \cos(\gamma + 2\delta) + U_2 \sin(\gamma + 2\delta) \ ,$$

falls man nämlich unter $(\gamma + 2\delta)$ das Azimuth des Elementes ds gegen die x-Axe versteht. Dabei mag γ selber das Azimuth der geraden Linie $r = (pp')$ gegen jene Axe vorstellen; so dass also 2δ, in Uebereinstimmung mit unsern bei ($D.$) gemachten Bezeichnungen, den Neigungswinkel des Elementes ds gegen die Linie r repräsentirt. Integrirt man die Formel ($E.$) über alle Elemente ds der Curve $s = (pp')$, so folgt:

$$U' - U = \int_{s=(pp')} [U_1 \cos(\gamma + 2\delta) + U_2 \sin(\gamma + 2\delta)]\, ds \ ,$$

d. i.

$$(F.) \qquad U' - U = [U_1^* \cos(\gamma + 2\delta^*) + U_2^* \sin(\gamma + 2\delta^*)]\, s \ .$$

Hier bezeichnet s die *Länge* der Curve $s = (pp')$; während U_1^*, U_2^*, $2\delta^*$ die Werthe von U_1, U_2, 2δ in einem unbekannten Punkte p^* der Curve s vorstellen. Ueberdies repräsentiren U und U' die Werthe der Function U in p und p'.

Nun ist identisch:

$$(G.) \quad U_1^* \cos(\gamma + 2\delta^*) = U_1 \cos\gamma + U_1^* [\cos(\gamma + 2\delta^*) - \cos\gamma] + (U_1^* - U_1)\cos\gamma ,$$

d. i.

$$(H.) \quad U_1^* \cos(\gamma + 2\delta^*) = U_1 \cos\gamma - 2\, U_1^* \sin\delta^* \sin(\gamma + \delta^*) + (U_1^* - U_1)\cos\gamma \ ,$$

wo U_1 den Werth von U_1 in p vorstellen soll. Beachtet man jetzt, dass nach ($D.$)

$$\text{abs } \delta^* < \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{1}{4} \ ,$$

mithin auch

$$(x.) \qquad \text{abs}\,(\sin\delta^*) < \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{1}{4}$$

ist, beachtet man ferner, dass (nach der Definition von M)

$$(y.) \qquad \text{abs}\,U_1^* \leqq M\ ,$$

und beachtet man endlich, dass nach $(B.)$

$$(z.) \qquad \text{abs}\,(U_1^* - U_1) < \frac{M\varepsilon_0}{4}$$

ist, so kann man die Formel $(H.)$ auch so schreiben:

$$U_1^* \cos(\gamma + 2\delta^*) = U_1 \cos\gamma + \vartheta\,\frac{M\varepsilon_0}{2} + \vartheta'\,\frac{M\varepsilon_0}{4}\ ,$$

oder auch so:

$$(J_1.) \qquad U_1^* \cos(\gamma + 2\delta^*) = U_1 \cos\gamma + \Theta_1 M\varepsilon_0\ ,$$

wo ϑ, ϑ', Θ_1 echte Brüche vorstellen. — Ebenso ergiebt sich

$$(J_2.) \qquad U_2^* \sin(\gamma + 2\delta^*) = U_2 \sin\gamma + \Theta_2 M\varepsilon_0\ .$$

Substituirt man aber diese Werthe $(J_1.)$, (J_2) in $(F.)$, so folgt mit Rücksicht auf $(A.)$:

$$(K.) \qquad \frac{U' - U}{s} = (U_1\cos\gamma + U_2\sin\gamma) + 2\Theta M\varepsilon_0 = 4\,\mathsf{H}M\ ,$$

wo H und Θ, ebenso wie Θ_1 und Θ_2, echte Brüche vorstellen.

Nun ist nach der Definition von 2δ:

$$ds = \frac{dr}{\cos 2\delta}\ ,$$

wo dr die senkrechte Projection des Elementes ds auf die gerade Linie $r = (pp')$ vorstellt. Hieraus folgt durch Integration über alle Elemente ds der Curve $s = (pp')$:

$$s = \frac{1}{\cos 2\delta^*}\,r\ ,$$

wo s und r die *Längen* der Curve s und der Linie r vorstellen, während $2\delta^*$ den Werth von 2δ in einem unbekannten Punkte p^* der Curve s bezeichnet. Somit folgt:

$$\frac{s}{r} = \frac{1}{\cos 2\delta^*} = 1 + \frac{1 - \cos 2\delta^*}{\cos 2\delta^*}$$

d. i.

$$\frac{s}{r} = 1 + \frac{2\sin^2\delta^*}{1 - 2\sin^2\delta^*}\ .$$

Nach (*x.*) ist aber:

$$2\sin^2\delta^* < \frac{\varepsilon_0}{8} < \frac{1}{8}\,, \quad \text{mithin: } 1 - 2\sin^2\delta^* > 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\,,$$

mithin:

$$\frac{2\sin^2\delta^*}{1 - 2\sin^2\delta^*} < \frac{\varepsilon_0}{8}\,\frac{8}{7} = \frac{\varepsilon_0}{7}\,.$$

Somit folgt:

$$\frac{s}{r} = 1 + \Theta'\,\frac{\varepsilon_0}{7}\,.$$

Multiplicirt man diese Formel mit der Formel (*K.*), und macht man dabei, was die in jener Formel (*K.*) auf der *rechten* Seite stehenden beiden Ausdrücke anbelangt, sowohl von dem *einen* wie auch von dem *andern* Gebrauch, so erhält man sofort:

$$(L.) \qquad \frac{U' - U}{r} = (U_1\cos\gamma + U_2\sin\gamma) + 2\Theta M\varepsilon_0 + \Theta'\,\frac{\varepsilon_0}{7}\,4\,\mathsf{H}M\,,$$

wo Θ, Θ', und H echte Brüche sind.

Hieraus aber ergiebt sich schliesslich:

$$(M.) \qquad \operatorname{abs}\left(\frac{U' - U}{r} - (U_1\cos\gamma + U_2\sin\gamma)\right) < 3M\varepsilon_0\,.$$

Diese Formel gilt, ihrer Ableitung nach, für jedweden innerhalb des Kreises liegenden und zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Punkt p'. Demgemäss ist der verlangte Beweis geführt, falls man nur das hier gewählte ε_0 so klein sich denkt, dass $3M\varepsilon_0 < \varepsilon$ ist.

§ 15.

Ueber monogene Fundamentalfunctionen.

Der Uebersichtlichkeit willen mögen die Sätze, um die es sich hier handelt, vorangestellt, und die Beweise derselben erst hinterher gegeben werden.

Erster Satz. — *Die gegebene geschlossene Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass*

(1.) *θ und θ' stetige Functionen der Bogenlänge σ sind.*

Ferner sei vorausgesetzt, dass für das von dieser Curve umschlossene Gebiet $\mathfrak{F}$ drei Fundamentalfunctionen U, U_1, U_2 existiren, die in jedwedem Punkte (x, y) innerhalb $\mathfrak{F}$ den Formeln entsprechen:

(2.) $$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 \ , \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 \ . \quad (!)$$

Denkt man sich alsdann in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ irgend eine in sich zurücklaufende Curve s construirt, so wird das über diese Curve s erstreckte Integral

(3.) $$\int (U_1 dy - U_2 dx) \text{ stets} = 0 \text{ sein}^*) \ .$$

Zweiter Satz. — *Bildet man ferner, nachdem innerhalb $\mathfrak{J}$ ein fester Punkt (x_0, y_0) markirt ist, das Integral*

(4.) $$V = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (U_1 dy - U_2 dx) \ ,$$

und denkt man sich dabei die Integrationscurve auf das Gebiet $\mathfrak{J}$ beschränkt, so wird die so definirte Function $V = V(x, y)$ nicht nur in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ eindeutig und stetig, sondern überdies auch eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein. Auch wird diese Function V in jedwedem Punkte innerhalb $\mathfrak{J}$ den Formeln entsprechen:

(5.) $$\frac{\partial V}{\partial x} = - U_2 \ , \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = U_1 \ ; \quad (!)$$

Formeln, die mit Rücksicht auf (2.) auch so darstellbar sind:

(6.) $$\frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial y} \ , \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \ . \quad (!)$$

Dritter Satz. — *Setzt man jetzt:*

(7.) $$W = U + iV \quad \text{und} \quad z = x + iy \ , \qquad (i = \sqrt{-1}) \ ,$$

so wird man, falls innerhalb $\mathfrak{J}$ oder am Rande von $\mathfrak{J}$ irgend ein Punkt z markirt, und überdies irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben ist, um diesen Punkt z, als Centrum, stets eine Kreisperipherie von solcher Kleinheit beschreiben können, dass für alle zu $\mathfrak{J}$ gehörigen und innerhalb dieser Peripherie befindlichen Punkte z' die Formel stattfindet:

---

*) Selbstverständlich ist die in Rede stehende Curve der Art zu denken, dass das Integral (3.) einen bestimmten Sinn hat. Man kann daher, um den Satz völlig strenge zu machen, und zugleich ohne Beeinträchtigung der weiterhin anzustellenden Betrachtungen, festsetzen, dass jene Curve ein Polygon sein solle, dessen einzelne Seiten entweder lauter *gerade Linien* und *Kreisbogen* sind, oder aber überdies auch noch aus irgend welchen *Strecken der gegebenen Randcurve* bestehen. Analoges ist zu bemerken mit Bezug auf das Integral (4.).

$$\text{(8.)} \qquad \text{mod}\left(\frac{W' - W}{z' - z} - (U_1 - iU_2)\right) < \varepsilon .$$

Dabei bezeichnet W' den Werth in z'; während W selber, sowie auch U_1 und U_2, die Werthe der betreffenden Functionen in z vorstellen.

Hieraus folgt sofort, dass das Binom $(U_1 - iU_2)$ in dem betrachteten Punkte z den Differentialquotienten von W nach z vorstellt:

$$\text{(9.)} \qquad \frac{dW}{dz} = U_1 - iU_2 ,$$

*und dass also $\frac{dW}{dz}$, ebenso wie W selber, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{F}$ ist**).

Vierter Satz. — *Ueberdies ergiebt sich aus* (8.), *dass der Werth des Differentialquotienten $\frac{dW}{dz}$ in jedwedem Punkte z, mag nun derselbe innerhalb $\mathfrak{F}$, oder am Rande von $\mathfrak{F}$ liegen, von der Wahl des bei seiner Bildung in Anwendung gebrachten Nachbarpunktes $z + dz$ unabhängig, und dass also die Function W nicht nur in jedem inneren Punkte, sondern ebenso auch in jedem Randpunkte als monogen zu bezeichnen ist.*

Fünfter Satz. — *Endlich ergiebt sich aus* (8.), *dass die Convergenz des Differenzen-Quotienten der Function W gegen den im Punkte z vorhandenen Differentialquotienten $\frac{dW}{dz}$ eine von allen Seiten her gleichmässige ist, oder mit anderen Worten, dass die Entstehungsweise des Differentialquotienten $\frac{dW}{dz}$ in jedwedem Punkte z des Gebietes $\mathfrak{F}$ eine von allen Seiten her äquiconvergente ist; wobei es keinen Unterschied macht, ob der betrachtete Punkt z innerhalb $\mathfrak{F}$, oder am Rande von $\mathfrak{F}$ liegt.*

Bemerkung zum vierten und fünften Satze. — Ist der Punkt z ein *Randpunkt* von $\mathfrak{F}$, so hat man sich, was die »Nachbarpunkte $z + dz$« und das »von allen Seiten her« betrifft, selbstverständlich auf solche Nachbarpunkte und auf solche Seiten zu beschränken, für welche die Function W wirklich *definirt* ist, also sich zu beschränken auf das Innere und den Rand des Gebietes $\mathfrak{F}$.

---

*) Es sind nämlich U, U_1, U_2 und V Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{F}$. Gleiches gilt daher, auf Grund der Formeln (7.) und (9.) auch von W und $\frac{dW}{dz}$.

Beweis des ersten Satzes. — Setzt man zuvörderst voraus, dass die geschlossene Curve s vollständig *innerhalb* $\mathfrak{F}$ liegt, so erhält man nach einer bekannten Green'schen Formel:

$$\int \frac{dU}{dn} ds = 0 ,$$

wo n die innere Normale des Elementes ds vorstellt. Nach dem ersten Satze pag. 84 ist aber $\frac{dU}{dn} = U_1 \cos \gamma + U_2 \sin \gamma$, wo γ das Azimuth der Normale n gegen die x-Axe bezeichnet. Somit ergiebt sich:

$$\int (U_1 \cos \gamma + U_2 \sin \gamma) ds = 0 ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int [U_1 \sin (\gamma - 90^0) - U_2 \cos (\gamma - 90^0)] ds = 0 .$$

Die Differenz $(\gamma - 90^0)$ repräsentirt aber das Azimuth des Elementes ds gegen die x-Axe. Bezeichnet man also die Componenten dieses Elementes ds nach den Coordinatenaxen mit dx und dy, so ist $ds \cos (\gamma - 90^0) = dx$ und $ds \sin (\gamma - 90^0) = dy$, wodurch die vorstehende Formel die Gestalt gewinnt:

$$\int (U_1 dy - U_2 dx) = 0 .$$

Dass nun schliesslich diese Formel auch dann noch gültig bleibt, wenn einzelne Punkte oder auch irgend welche Strecken der Curve s in den Rand von $\mathfrak{F}$ hineinfallen, erkennt man leicht, falls man nur beachtet, dass U_1 und U_2 (als Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{F}$) in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{F}$ stetig sind. — *Q. e. d.*

Beweis des zweiten Satzes. — Aus dem soeben bewiesenen ersten Satze folgt sofort, dass die durch die Formel

$$(\alpha.) \qquad V = \int_{x_0 y_0}^{xy} (U_1 dy - U_2 dx)$$

definirte Function $V = V(x, y)$ *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{F}$ *eindeutig und stetig ist*, und dass sie überdies in jedem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{F}$ den Formeln entspricht:

$$(\beta.) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = - U_2 , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = + U_1 . \quad (!)$$

Nach unserer Voraussetzung sind aber U_1, U_2 Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$. Folglich werden z. B. die Ableitungen

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y}$$

innerhalb $\mathfrak{J}$ nicht nur überall existiren, sondern *innerhalb* $\mathfrak{J}$ auch überall stetig sein. Gleiches gilt daher nach (β.) von den Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y};$$

auch ergiebt sich aus (β.), unter Rücksichtnahme auf (2.), dass der Ausdruck $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ *innerhalb* $\mathfrak{J}$ überall $= 0$ ist. Folglich ist V eine *Fundamentalfunction* des Gebietes $\mathfrak{J}$. Ueberdies sind die Gleichungen (β.) mit Rücksicht auf (2.) auch so darstellbar:

(γ.) $$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$ (!) — *Q. e. d.*

Beweis des dritten Satzes. — Nach unserer Voraussetzung sind U, U_1, U_2 Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$, die den Relationen entsprechen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2. \quad (!)$$

Genau dasselbe gilt aber, auf Grund des soeben bewiesenen zweiten Satzes, auch von den Functionen V, $-U_2$, U_1. In der That sind diese Functionen V, $-U_2$, U_1, zufolge jenes Satzes, Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$ und den Formeln

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -U_2, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = U_1 \quad (!)$$

entsprechend.

Demgemäss ist der Satz pag. 88 auf U, U_1, U_2 und ebenso auch auf V, $-U_2$, U_1 ohne Weiteres anwendbar. Denkt man sich also irgend einen Punkt p des Gebietes $\mathfrak{J}$ markirt, und versteht man überdies unter ε_0 einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad, so wird man um p (als Centrum) stets einen Kreis von solcher Kleinheit beschreiben können, dass für alle innerhalb dieses Kreises liegende und zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Punkte p' die Formeln stattfinden:

$$(A.) \qquad \frac{U' - U}{(pp')} - (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma) = \Theta_1 \varepsilon_0 ,$$

$$(B.) \qquad \frac{V' - V}{(pp')} - (-U_2 \cos\gamma + U_1 \sin\gamma) = \Theta_2 \varepsilon_0 ,$$

wo γ das Azimuth der geraden Linie (pp') gegen die x-Axe vorstellt; während Θ_1, Θ_2 echte Brüche bezeichnen.

Setzt man jetzt:

$$W = U + iV , \quad z = x + iy ,$$

$$W' = U' + iV' , \quad z' = x' + iy' , \quad (i = \sqrt{-1}),$$

und betrachtet man dabei (x, y) und (x', y') als die Coordinaten der beiden Punkte p und p', so erhält man

$$x' - x = (pp') \cos\gamma ,$$

$$y' - y = (pp') \sin\gamma ,$$

mithin:

$$(C.) \qquad z' - z = (pp') e^{i\gamma} .$$

Multiplicirt man jetzt die Formeln $(A.)$, $(B.)$ mit 1, i und addirt, so folgt:

$$\frac{W' - W}{(pp')} - (U_1 - iU_2) e^{i\gamma} = \varepsilon_0 (\Theta_1 + i\Theta_2) ,$$

oder, falls man für (pp') den aus $(C.)$ entspringenden Werth substituirt:

$$\frac{W' - W}{z' - z} - (U_1 - iU_2) = \varepsilon_0 (\Theta_1 + i\Theta_2) e^{-i\gamma} ,$$

also (weil γ seiner Definition nach *reell* ist):

$$(D.) \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{W' - W}{z' - z} - (U_1 - iU_2)\right) < 2\varepsilon_0 .$$

Demgemäss ist der verlangte Beweis geführt, falls man nur das hier gewählte ε_0 sich so eingerichtet denkt, dass $2\varepsilon_0 < \varepsilon$ ist.

Der Beweis des vierten und fünften Satzes dürfte schon mitgegeben sein durch die blosse Aussprache dieser Sätze.

Drittes Capitel.

Ueber die Green'sche Function und über die Theorie der conformen Abbildung.

Nach Absolvirung einiger Hülfssätze (§§ 16, 17), werden wir (in den §§ 18 — 21) die *Green'sche Function*, und sodann in (§ 22) die *Theorie der conformen Abbildung* einer genaueren Untersuchung unterwerfen.

Dabei werden uns ausser den *Stetigkeitsfragen*, die mit Hülfe der beiden vorhergehenden Capitel leicht zu absolviren sind, auch Fragen über das *Nullwerden* resp. *Nichtnullwerden* gegebener Functionen entgegentreten, deren Beantwortung wesentlich *neue* Hülfsmittel und Methoden erheischt. Und jene vorangeschickten Hülfssätze (§§ 16, 17) sollen dazu dienen, um die Darlegung dieser Methoden etwas einheitlicher und übersichtlicher zu machen.

§ 16.

Geometrische Sätze.

Die gegebene geschlossene Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass

(1.) *θ, θ', θ'' stetige Functionen der Bogenlänge σ sind, und dass überdies θ' überall $\geqq 0$ ist**).

Ferner sei R_0 der kleinste Krümmungsradius der Curve. Alsdann gelten folgende Sätze:

---

*) Hieraus folgt z. B., dass die Curve überall convex ist, jedoch der Art, dass sie auch geradlinige Strecken enthalten kann. Vgl. auch die ausführlichere Note auf pag. 113.

Erster Satz. — *Denkt man sich zur gegebenen Curve eine innere Parallelcurve construirt, deren constanter Abstand von jener $< R_0$ ist, und die Bogenlängen zweier einander correspondirender Punkte dieser beiden Curven mit σ und s bezeichnet, so wird s eine eindeutige und stetige Function von σ, und ebenso auch umgekehrt σ eine eindeutige und stetige Function von s sein.*

Zweiter Satz. — *Repräsentirt A irgend eine positive Constante, die $< R_0$ ist, und construirt man irgend einen die gegebene Curve auf ihrer inneren Seite berührenden Kreis vom Radius A, so wird dieser Kreis, ausser seinem Berührungspunkte, keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein haben.*

Dritter Satz. — *Es sei q der Berührungspunkt und C der Mittelpunkt des soeben construirten Kreises vom Radius A. Denkt man sich alsdann um C einen etwas grösseren Kreis vom Radius $A + \alpha$ construirt, so wird dieser letztere die gegebene Curve in zwei zu beiden Seiten von q liegenden Punkten schneiden, sonst aber keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein haben, falls man nur den Radius $A + \alpha$ der Bedingung unterwirft:*

$$A < A + \alpha < \varrho^* , \tag{2.}$$

wo ϱ^* eine passend zu wählende Constante vorstellt.

Auch wird man durch weitere Verkleinerung von ϱ^* dafür sorgen können, dass diese beiden Schnittpunkte dem festen Punkte q beliebig nahe liegen.

Beweis des ersten Satzes. — Die gegebene Curve wird, zufolge der Voraussetzungen (1.), von sämmtlichen Krümmungskreisen auf ihrer *innern* Seite berührt. Demgemäss ist der in der Formel (*E.*) pag. 4 enthaltene Factor ε im gegenwärtigen Falle $= +1$; sodass also jene Formel die Gestalt annimmt:

$$\theta' = \frac{1}{R} . \tag{α.}$$

Hieraus folgt sofort $\theta' \leqq \frac{1}{R_0}$, mithin:

$$1 - A\theta' \geqq 1 - \frac{A}{R_0} , \tag{β.}$$

falls man nämlich unter R_0 den *kleinsten* Krümmungsradius der gegebenen Curve, und unter A irgend welche positive Constante versteht.

Construirt man jetzt zur gegebenen Curve irgend eine innere Parallelcurve im constanten Abstande A, und setzt man voraus, dass dieser Abstand $A < R_0$ sei, so ergiebt sich aus (β.)

(γ.) $$1 - A\theta' > 0 .$$

Und mit Rücksicht auf diese Relation (γ.) ergiebt sich nun weiter aus (ε.) pag. 85, dass zwischen den Bogenlängen σ und s zweier auf den beiden Curven einander correspondirenden Punkte die Gleichung stattfindet:

(δ.) $$ds = (1 - A\theta')d\sigma .$$

Hieraus aber folgt sofort, dass s eine *eindeutige* und *stetige* Function von σ ist.

Ferner ergiebt sich aus (δ.), unter Rücksichtnahme auf (γ.), dass jedem Wachsen von σ ein Wachsen von s, und umgekehrt jedem Wachsen von s ein Wachsen von σ entspricht. Denkt man sich also die gegenseitige Beziehung zwischen σ und s geometrisch durch eine Curve dargestellt, indem man die σ zu Abscissen, die s zu Ordinaten nimmt, so wird diese Curve in unaufhörlichem Steigen (niemals im Fallen oder in einem Parallelbleiben zur Abscissenaxe) begriffen sein. Und hieraus folgt, dass, ebenso wie s eine *eindeutige* und *stetige* Function von σ ist, ebenso auch umgekehrt σ eine *eindeutige* und *stetige* Function von s repräsentirt. — *Q. e. d.*

Den Beweis des zweiten Satzes muss ich einstweilen schuldig bleiben*). Doch dürfte die unmittelbare geometrische Anschauung so sehr für diesen Satz sprechen, dass man wohl, auch ohne Beweis, die Richtigkeit desselben kaum bezweifeln wird.

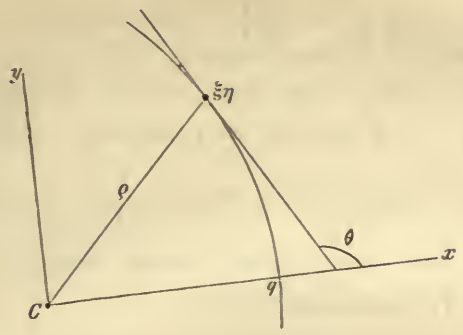
Beweis des dritten Satzes. — Nimmt man C zum Anfangspunkt und Cq zur x-Axe des Coordinatensystems, und bezeichnet man die Coordinaten irgend eines Curvenpunktes σ mit ξ, η, so gilt für den von C nach dem Punkt σ laufenden Radius-vector ϱ die Formel:

(A.) $$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} .$$

Beachtet man nun die Relationen [vgl. (C.) pag. 3]:

(B.) $$\begin{cases} \xi' = \cos\theta , \\ \eta' = \sin\theta , \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi'' = -\theta' \sin\theta , \\ \eta'' = +\theta' \cos\theta , \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi''' = -\theta'^2 \cos\theta - \theta'' \sin\theta , \\ \eta''' = -\theta'^2 \sin\theta + \theta'' \cos\theta , \end{cases}$$

*) Ich werde den inzwischen (nämlich während des Druckes dieser Abhandlung) von mir gefundenen Beweis im *Anhange* mittheilen.



so ergiebt sich aus den Voraussetzungen (1.) und mit Rücksicht auf (*A.*) sofort, dass

$$\xi,\ \xi',\ \xi'',\ \xi''',\quad \eta,\ \eta',\ \eta'',\ \eta''',\quad \varrho,\ \varrho',\ \varrho'',\ \varrho'''$$

stetige Functionen von σ sind. Setzt man also

(*C.*) $$\varrho = \Phi(\sigma)\,,\quad \text{mithin}\quad \varrho' = \Phi'(\sigma)\,,$$

und denkt man sich der Bequemlichkeit willen die Bogenlänge σ von q aus gerechnet, so erhält man nach bekanntem Satze:

(*D.*) $$\varrho' = \Phi'(0) + \frac{\sigma}{1}\Phi''(0) + \frac{\sigma^2}{1\,.\,2}\Phi'''(\Theta\sigma)\,,$$

wo Θ einen unbekannten echten Bruch vorstellt.

Bringt man jetzt die theils aus (*A.*), (*B.*), (*C.*), anderntheils aber auch aus pag. 4, (*E.*) und pag. 101, (α.) entspringenden Formeln:

$$\begin{cases} \xi' = \cos\theta\,, \\ \eta' = \sin\theta\,, \\ \dfrac{1}{R} = \xi'\eta'' - \eta'\xi''\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi(\sigma) = \varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,, \\ \Phi'(\sigma) = \varrho' = \dfrac{\xi\xi'+\eta\eta'}{\varrho}\,, \\ \Phi''(\sigma) = \varrho'' = \dfrac{(\xi'^2+\eta'^2)+(\xi\xi''+\eta\eta'')}{\varrho} - \dfrac{(\xi\xi'+\eta\eta')^2}{\varrho^3} \end{cases}$$

speciell auf den Punkt q in Anwendung, und beachtet man dabei, dass die diesem Punkte q zugehörigen σ, ξ, η, θ die Werthe haben:

$$\sigma_q = 0\,,\quad \xi_q = A\,,\quad \eta_q = 0\,,\quad \theta_q = 90^0\,,$$

so erhält man:

$$\begin{cases} \xi_q' = 0\,, \\ \eta_q' = 1\,, \\ \dfrac{1}{R_q} = -\,\xi_q''\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi(0) = \varrho_q = A\,, \\ \Phi'(0) = \varrho_q' = 0\,, \\ \Phi''(0) = \varrho_q'' = \dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{R_q}\,; \end{cases}$$

so dass also die Formel (*D.*) übergeht in:

$$(E.) \qquad \varrho' = \frac{\sigma}{1}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{R_q}\right) + \frac{\sigma^2}{1 \cdot 2}\Phi'''(\Theta\sigma) \ .$$

Diese Formel ist, falls man den absolut grössten Werth der stetigen Function $\varrho''' = \Phi'''(\sigma)$ mit M bezeichnet, auch so darstellbar:

$$(F.) \qquad \varrho' = \sigma\,(L + \Theta_1\,\sigma M)\,, \quad \text{wo } L = \frac{1}{A} - \frac{1}{R_q} \text{ ist} \ ,$$

während Θ_1 wiederum einen echten Bruch vorstellt.

Nach unsern Voraussetzungen ist:

$$A < R_0 \leqq R_q \ .$$

Folglich ist die in $(F.)$ enthaltene Constante L unter allen Umständen > 0. Folglich werden wir auf der gegebenen Curve zu beiden Seiten des Punktes $\sigma = 0$ (d. i. des Punktes q) zwei Punkte $\sigma = -\delta$ und $\sigma = +\delta$ markiren, und dabei δ so klein machen können, dass der in $(F.)$ in den Klammern enthaltene Ausdruck längs der von diesen beiden Punkten $\sigma = -\delta$ und $\sigma = +\delta$ begrenzten Curvenstrecke durchweg > 0 bleibt. Alsdann aber wird, falls man δ als positiv sich vorstellt, und die Punkte $\sigma = -\delta$, $\sigma = 0$, $\sigma = +\delta$ kurzweg mit Δ_1, q, Δ bezeichnet, der Werth von ϱ'

$$\begin{cases} \text{längs der Curvenstrecke } \Delta_1\, q \text{ (excl. } q\text{) durchweg} < 0, \\ \text{und längs der Strecke } q\,\Delta \text{ (excl. } q\text{) durchweg} > 0 \end{cases}$$

sein, wie solches aus $(F.)$ ohne Weiteres sich ergiebt. Folglich wird der Werth von ϱ selber

$$(G.) \qquad \begin{cases} \text{längs der Strecke } \Delta_1 q \textit{ unaufhörlich abnehmen}, \\ \text{und längs der Strecke } q\Delta \textit{ unaufhörlich wachsen}. \end{cases}$$

Nun soll der um C mit dem Radius $(Cq) = A$ beschriebene und die Curve in q berührende (in den betreffenden Figuren *nicht* gezeichnete) Kreis den Voraussetzungen des hier zu beweisenden dritten Satzes entsprechen. D. h. sein Radius A soll $< R_0$ sein, wo R_0 den kleinsten Krümmungsradius der Curve vorstellt. Zufolge des zweiten Satzes (pag. 101) wird daher dieser Kreis, ausser seinem Berührungspunkte q, keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein haben. Bezeichnet man also die zur Strecke $\Delta_1 q \Delta$ complementare Curvenstrecke mit $\Delta\Delta^*\Delta_1$ (der Art, dass beide Strecken zusammengenommen die ganze gegebene Curve ausmachen), so werden die dieser complementaren Curvenstrecke $\Delta\Delta^*\Delta_1$ zugehörigen Radii-

vectores ϱ durchweg $> A$ sein. Oder mit andern Worten: bezeichnet man das *Minimum* der der Curvenstrecke $\Delta\Delta^*\Delta_1$ zugehörigen Radiivectores mit ϱ^*, so ist $\varrho^* > A$, mithin:

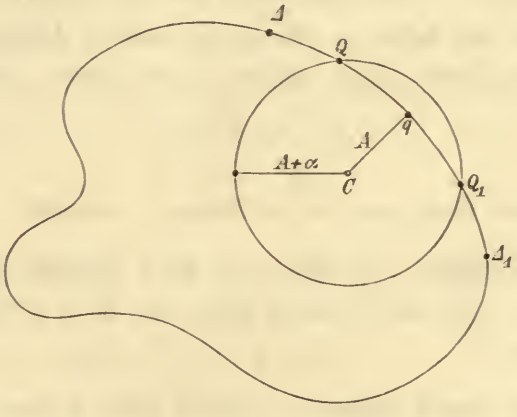
(*H.*) $$A < \varrho^* .$$

Denkt man sich jetzt eine neue Constante α der Art gewählt, dass

(*J.*) $$A < A + \alpha < \varrho^*$$

ist, und um C, als Centrum, eine Kreisperipherie vom Radius $A + \alpha$ beschrieben, so wird jene Curvenstrecke $\Delta\Delta^*\Delta_1$ *völlig ausserhalb* dieser Peripherie liegen. Andererseits aber wird der Punkt q, dessen Radiusvector $(Cq) = A$, mithin, nach (*J.*), $< A + \alpha$ ist, *innerhalb* dieser Peripherie sich befinden. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (*G.*), dass die Curvenstrecke $\Delta_1 q$ die Peripherie *einmal durchschneidet*, dass sie aber, abgesehen von diesem einen Schnittpunkte, keinen weiteren Punkt mit der Peripherie gemein hat, und dass überdies genau dasselbe auch von der Curvenstrecke $q\Delta$ gilt.

Alles zusammengefasst, ergiebt sich also, dass die um C mit dem Radius $A + \alpha$ beschriebene Peripherie die gegebene Curve in *zwei* zu beiden Seiten von q gelegenen Punkten schneidet. und dass sie, ausser diesen beiden Schnittpunkten, keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein hat.



Auch kann man durch weitere Verkleinerung des Radius $A + \alpha$ jene beiden Schnittpunkte, welche in vorstehender Figur mit Q, Q_1 bezeichnet sind, beliebig nahe an q heranbringen. Denn wenn man

α gegen Null convergiren lässt, so werden Q und Q_1 unendlich nahe an q heranrücken; wie sich solches mit Rücksicht auf (*G.*) leicht ergiebt. U. s. w.

§ 17.

Aufstellung einiger Hülfssätze.

Erster Hülfssatz. — *Längs der gegebenen Curve sei eine Function der Bogenlänge* $\Phi = \Phi(\sigma)$ *vorgeschrieben, und zwar sei vorausgesetzt dass*

(1.) *0, 0′ und* Φ *stetige Functionen von* σ *sind, und dass* Φ *durchweg* $\geqq 0$ *ist.*

Ferner sei q *irgend ein Punkt der Curve, und* (qp) *irgend ein Stück der in* q *errichteten innern Normale. Endlich sei* qQ *eine von* q *aus auf der gegebenen Curve abgeschnittene Strecke, und*

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{qQ} \Phi \frac{\cos\omega}{E}\, d\sigma \tag{2.}$$

ein über alle Elemente $d\sigma$ *der Curvenstrecke* qQ *ausgedehntes Integral. Dabei bezeichne* Φ *den Werth der Function* Φ *im Element* $d\sigma$, *ferner* E *den Abstand dieses Elementes vom Punkte* p, *endlich* ω *den Winkel von* E *gegen* pq. Vgl. die folgende Figur.

Versteht man alsdann unter ε *einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad, so wird man — und zwar ohne über die Länge von* (qp) *irgend welche Kenntniss zu haben — durch ein näheres Heranschieben von* Q *gegen den festen Punkt* q *stets dafür sorgen können, dass*

$$\text{abs } J < \frac{\Phi_q + \varepsilon}{4} \tag{3.}$$

wird, wo Φ_q *den Werth von* Φ *im Punkte* q *vorstellt.*

Zweiter Hülfssatz. — *Wort für Wort dasselbe gilt auch dann, wenn man unter* (qp) *ein beliebiges Stück der in* q *errichteten äussern Normale versteht.*

Beweis des ersten Satzes. — Nimmt man q zum Anfangspunkte, die positive Tangente in q zur x-Axe, und die innere Normale qp zur y-Axe, und bezeichnet man die Coordinaten des Elementes $d\sigma$ mit ξ, η, so ist [vgl. die folgende Figur]:

(A.) $$\cos\omega = \frac{(pq)-\eta}{E}, \quad \text{und zugleich:} \quad d\sigma = \frac{d\xi}{\cos\theta},$$

wo $d\xi$ die Projection des Elementes $d\sigma$ auf die x-Axe vorstellt, während θ das Azimuth von $d\sigma$ gegen diese Axe bezeichnet. Dabei mag die Curvenstrecke qQ gleich von Anfang an so klein gedacht werden, dass θ längs dieser Strecke zwischen -60^0 und $+60^0$, mithin $\cos\theta$ zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ bleibt. Alsdann wird zufolge der Voraussetzung (1.) die Function

$$\frac{\Phi}{\cos\theta} \quad \text{längs der Curvenstrecke } qQ \text{ durchweg} \geqq 0$$

sein. — Substituirt man nun die Werthe (A.) in (2.), so folgt:

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{qQ} \frac{\Phi}{\cos\theta}\,\frac{(pq)-\eta}{E^2}\,d\xi,$$

mithin:

$$\operatorname{abs} J \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{qQ} \left(\operatorname{abs}\frac{\Phi}{\cos\theta}\right)\left(\operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2}\right)d\xi,$$

oder, falls man den grössten Werth jener positiven Function $\frac{\Phi}{\cos\theta}$ längs der Strecke qQ mit G bezeichnet:

(B.) $$\operatorname{abs} J \leqq \frac{1}{2\pi}\,G\,Y, \quad \text{wo } Y = \int_{qQ}\left(\operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2}\right)d\xi.$$

Nun ist identisch:

$$\frac{(pq)-\eta}{E^2} = \left(\frac{R}{E}\right)^2\frac{(pq)}{R^2} - \frac{\eta}{E^2},$$

wo R den Abstand des Elementes $d\xi$ von p vorstellen soll (vgl. die folgende Figur). Dieser Abstand R ist aber die dritte Seite eines Dreiecks, dessen beide andern Seiten E und η sind, also*):

$$R \leqq E + \operatorname{abs}\eta.$$

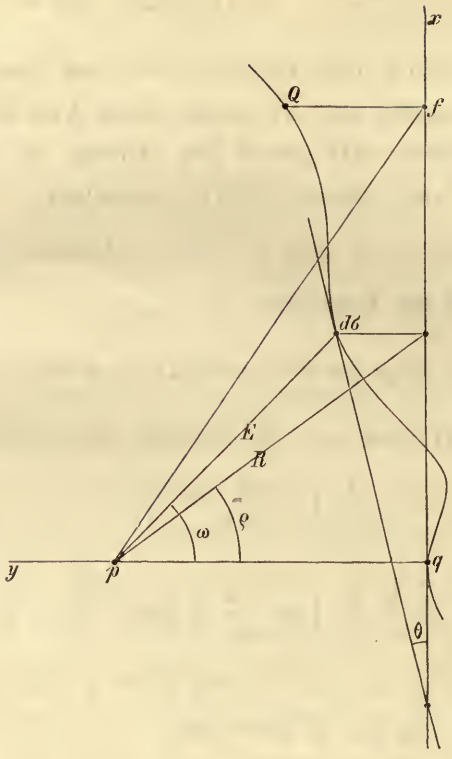
Somit folgt:

$$\operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2} \leqq \left(1+\frac{\operatorname{abs}\eta}{E}\right)^2\frac{(pq)}{R^2} + \frac{\operatorname{abs}\eta}{E^2},$$

oder, weil $E \geqq \xi$, mithin $\frac{1}{E} \leqq \frac{1}{\xi}$ ist:

(C.) $$\operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2} \leqq \left(1+\frac{\operatorname{abs}\eta}{\xi}\right)^2\frac{(pq)}{R^2} + \frac{\operatorname{abs}\eta}{\xi^2}.$$

*) Es ist zu beachten, dass ξ für alle Elemente $d\sigma$ der Curvenstrecke qQ positiv ist, dass hingegen η für einige dieser Elemente positiv, für andere negativ sein kann.



Zufolge der Voraussetzungen (1.) sind ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' *stetige* Functionen der Bogenlänge σ. Rechnet man daher diese Bogenlänge von q aus, und bezeichnet man den absolut grössten Werth jener sechs Functionen längs der ganzen gegebenen Curve mit M, so erhält man [vgl. etwa die analogen Betrachtungen auf pag. 103] die Formeln:

$$\begin{cases} \xi = \xi_q + \sigma \xi_q' + \sigma^2 \Theta_1 M \ , \\ \eta = \eta_q + \sigma \eta_q' + \sigma^2 \Theta_2 M \ , \end{cases}$$

wo Θ_1, Θ_2 echte Brüche sind. Es ist aber $\xi_q = \eta_q = \theta_q = 0$, mithin:

$$\begin{cases} \xi_q = 0 \ , \\ \eta_q = 0 \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_q' = \cos \theta_q = 1 \ , \\ \eta_q' = \sin \theta_q = 0 \ ; \end{cases}$$

so dass also jene Formeln die Gestalt gewinnen:

$$\begin{cases} \xi = \sigma + \sigma^2 \Theta_1 M \ , \\ \eta = \qquad \sigma^2 \Theta_2 M \ . \end{cases}$$

Somit folgt, falls man den *absoluten* Werth von Θ_2 mit $\Theta\Theta$ bezeichnet:

$$(\alpha.) \qquad \frac{\operatorname{abs}\eta}{\xi} = \frac{\sigma\Theta^2 M}{1+\sigma\Theta_1 M}\,, \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{abs}\eta}{\xi^2} = \frac{\Theta^2 M}{(1+\sigma\Theta_1 M)^2}\,.$$

Da wir die Bogenlänge σ von q aus gerechnet haben, so sind die Punkte q und Q respective mit $\sigma = 0$ und $\sigma = \delta$ zu bezeichnen, wo alsdann δ die *Länge* der betrachteten Curvenstrecke qQ repräsentirt. Denken wir uns nun Q so nahe an q herangeschoben, dass $\delta < \frac{1}{2M}$ ist, so gilt für die Bogenlänge σ irgend eines zur Curvenstrecke qQ gehörigen Punktes $(\xi,\ \eta)$ stets die Formel: $\sigma \leq \delta < \frac{1}{2M}$, d. i. die Formel:

$$(\beta.) \qquad \sigma M \leqq \delta M < \frac{1}{2}\,;$$

wodurch die Relationen $(\alpha.)$ übergehen in:

$$(\gamma.) \qquad \frac{\operatorname{abs}\eta}{\xi} < \frac{\delta M}{1-\frac{1}{2}} = 2\delta M\,, \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{abs}\eta}{\xi^2} < \frac{M}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4M$$

Mit Rücksicht auf diese Relationen $(\gamma.)$ ergiebt sich aus $(C.)$:

$$(D.) \qquad \operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2} < (1+2\delta M)^2\,\frac{(pq)}{R^2} + 4M\,,$$

also mit Rücksicht auf $(\beta.)$ *a fortiori**):

$$(E.) \qquad \operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2} < (1+6\delta M)\,\frac{(pq)}{R^2} + 4M\,.$$

Demgemäss erhält man für das in $(B.)$ angegebene (stets positive) Integral Y die Formel:

$$(F.) \qquad Y < (1+6\delta M)\int_{qQ}\frac{(pq)d\xi}{R^2} + 4M\int_{qQ} d\xi\,.$$

Bezeichnet man nun den Neigungswinkel von R gegen pq mit ϱ, so ist (vgl. die vorhergehende Figur):

$$\xi = (pq)\operatorname{tang}\varrho\,, \quad \text{mithin:} \quad d\xi = (pq)\frac{d\varrho}{\cos^2\varrho}\,, \quad \text{und:} \quad R = \frac{(pq)}{\cos\varrho}\,.$$

mithin:

$$\frac{(pq)\,d\xi}{R^2} = d\varrho\,;$$

wodurch die Formel $(F.)$ übergeht in:

---

*) Es ist nämlich nach $(\beta.)$: $2\delta M < 1$, mithin: $(2\delta M)^2 < 2\delta M$.

$$(G.) \qquad Y < (1 + 6\delta M)\int_{qQ} d\varrho + 4M\int_{qQ} d\xi \ .$$

Von diesen beiden Integralen ist offenbar das *erste* gleich dem Winkel (qpf), und das *zweite* gleich der Länge (qf), wo f den Fusspunkt des von Q aus auf die x-Axe herabgelassenen Perpendikels vorstellt (vgl. die Figur). Folglich ist das *erste* $\leqq \frac{\pi}{2}$, und das *zweite* $\leqq \delta$, wo δ nach wie vor die Länge der Curvenstrecke qQ vorstellt. Demgemäss ergiebt sich aus $(G.)$:

$$Y < (1 + 6\delta M)\frac{\pi}{2} + 4\delta M \ ,$$

$$(H.) \qquad \text{d. i.} \qquad Y < \frac{\pi}{2} + (3\pi + 4)\delta M \ .$$

Dies in $(B.)$ substituirt, erhält man:

$$(J.) \qquad \text{abs } J < \left(\frac{1}{4} + \frac{3\pi + 4}{2\pi}\delta M\right) G \ ,$$

oder, falls man $G = \Phi_q + (G - \Phi_q)$ schreibt, indem man dabei unter Φ_q den Werth von Φ im Punkte q versteht:

$$(K.) \quad \text{abs } J < \frac{\Phi_q}{4} + \left(\frac{3\pi + 4}{2\pi}\delta M\Phi_q\right) + (G - \Phi_q)\left(\frac{1}{4} + \frac{3\pi + 4}{2\pi}\delta M\right) \ .$$

Was die *drei* hier auf der rechten Seite stehenden Glieder betrifft, so kann man, falls irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben ist, durch Verkleinerung der Länge δ der Curvenstrecke qQ zunächst dafür sorgen, dass das *vorletzte* Glied $< \frac{\varepsilon}{8}$ wird. Sodann aber kann man, weil G den grössten Werth der stetigen Function $\frac{\Phi}{\cos\theta}$ längs jener Curvenstrecke, Φ_q aber den Werth dieser Function in q vorstellt, durch weitere Verkleinerung von δ den Factor $(G - \Phi_q)$ des *letzten* Gliedes beliebig klein machen, und in solcher Weise dafür sorgen, dass der Werth dieses *letzten* Gliedes ebenfalls $< \frac{\varepsilon}{8}$ wird. Solches ausgeführt, ist alsdann:

$$(L.) \qquad \text{abs } J < \frac{\Phi_q}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\Phi_q + \varepsilon}{4} \ . \ — \ Q.\ e.\ d.$$

Der Beweis des zweiten Hülfssatzes ergiebt sich in ganz analoger Weise, und bedarf daher keiner weiteren Erläuterung.

Dritter Hülfssatz. — *Eine gegebene Function* $\Omega = \Omega(x, y)$ *sei stetig in ganzer Erstreckung einer in der* xy*-Ebene um den Punkt* C *mit dem Radius* R *beschriebenen Kreisfläche* $\mathfrak{K}$. *Ferner mag der kleinste Werth, den* Ω *längs einer um* C *mit dem Radius* $r \leqq R$ *beschriebenen Kreisperipherie besitzt, mit* $\Omega_0(r)$ *bezeichnet sein.*

Alsdann wird dieses $\Omega_0(r)$ *eine Function von* r *sein, die in Erstreckung des Intervalls* $(0, R)$ *stetig ist.*

Beweis. — Es sei ε ein beliebig gegebener Kleinheitsgrad. Wir denken uns das Intervall $(0, R)$ aufgetragen auf irgend einer geraden Linie, die etwa die r-Axe heissen mag. Sind nun $\Omega_0(r)$ und $\Omega_0(r + \varrho)$ die Werthe der Function Ω_0 in irgend zwei dem Intervall $(0, R)$ zugehörigen Punkten r und $r + \varrho$, und denken wir uns dabei ϱ der Bedingung unterworfen:

$$(\alpha.) \qquad \text{abs } \varrho \leqq \alpha \ ,$$

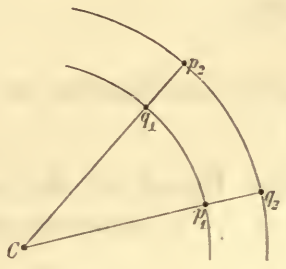
wo α eine positive Constante vorstellen soll, so haben wir nachzuweisen, dass der Ausdruck

$$(\beta.) \qquad \text{abs } [\Omega_0(r + \varrho) - \Omega_0(r)] \ ,$$

falls man die Constante α hinreichend klein sich vorstellt, stets $< \varepsilon$ bleiben wird, welche Lage man jenen beiden der Bedingung $(\alpha.)$ unterworfenen Punkten r und $r + \varrho$ in Erstreckung des Intervalls $(0, R)$ auch immer zuertheilen mag.

Wir werden zeigen, dass solches in der That der Fall ist, und dass α die erforderliche Kleinheit besitzt, sobald man α so einrichtet, dass die Werthdifferenz der gegebenen auf $\mathfrak{K}$ stetigen Function $\Omega = \Omega(x, y)$ für jedwedes zu $\mathfrak{K}$ gehörige α-Punktpaar*) $< \varepsilon$ ist.

Zu diesem Zwecke beschreiben wir um das Centrum C zwei Kreisperipherien mit den Radien r und $r + \varrho$. Auf der *erstern* Peripherie werden sich alsdann ein Punkt oder auch mehrere Punkte befinden, in denen die Function Ω den dieser Peripherie zugehörigen *kleinsten* Werth $\Omega_0(r)$ annimmt. Irgend einer von diesen Punkten mag p_1 heissen. Desgleichen



*) Vgl. die Note pag. 74.

mag p_2 irgend einer von denjenigen Punkten der *zweiten* mit dem Radius $(r + \varrho)$ beschriebenen Peripherie vorstellen, in denen Ω den *kleinsten* dieser zweiten Peripherie zugehörigen Werth $\Omega_0(r + \varrho)$ besitzt. Ueberdies markiren wir noch zwei weitere respective zur *ersten* und *zweiten* Peripherie gehörige Punkte q_1 und q_2, und zwar der Art, dass p_1 und q_2 auf *demselben* Radius, und andererseits p_2 und q_1 ebenfalls auf *gleichem* Radius liegen. Vgl. die vorstehende Figur.

Nach $(\alpha.)$ ist aber abs $\varrho \leqq \alpha$. Folglich bilden die Punkte p_1 und q_2 ein α-Punktpaar, ebenso p_2 und q_1. Denken wir uns also die Constante α so klein gewählt, dass die Werthdifferenz der Function $\Omega = \Omega(x, y)$ für jedwedes zu $\mathfrak{R}$ gehörige α-Punktpaar $< \varepsilon$ ist, und bezeichnen wir die Werthe dieser Function in den vier Punkten p_1, p_2, q_1, q_2 kurzweg mit P_1, P_2, Q_1, Q_2, so ist:

$$(\gamma.) \qquad Q_1 = P_2 + \vartheta\varepsilon \quad \text{und} \quad Q_2 = P_1 + \Theta\varepsilon \ ,$$

wo ϑ und Θ wirkliche echte Brüche*) vorstellen. Ueberdies aber finden, weil P_1 und P_2 die Minimalwerthe der Function Ω für die *erste* und *zweite* Peripherie vorstellen, die Relationen statt:

$$P_1 \leqq Q_1 \quad \text{und} \quad P_2 \leqq Q_2 \ .$$

Substituiren wir hier für Q_1 und Q_2 die Ausdrücke $(\gamma.)$, so erhalten wir:

$$P_1 \leqq P_2 + \vartheta\varepsilon \quad \text{und} \quad P_2 \leqq P_1 + \Theta\varepsilon \ .$$

Und hieraus folgt sofort:

$$P_1 - \vartheta\varepsilon \leqq P_2 \leqq P_1 + \Theta\varepsilon \ ,$$

also, weil ϑ, Θ wirkliche echte Brüche sind:

$$P_1 - \varepsilon < P_2 < P_1 + \varepsilon \ ,$$

mithin:

$$-\varepsilon < P_2 - P_1 < +\varepsilon \ ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\delta.) \qquad \text{abs}\,(P_2 - P_1) < \varepsilon \ .$$

Diese Formel $(\delta.)$ aber ist, weil P_1 und P_2 respective mit $\Omega_0(r)$ und $\Omega_0(r + \varrho)$ identisch sind, auch so darstellbar:

$$(\varepsilon.) \qquad \text{abs}\,[\Omega_0(r + \varrho) - \Omega_0(r)] < \varepsilon \ . \ -\ Q.\ e.\ d.$$

*) Ich nenne ϑ einen *wirklichen* echten Bruch, sobald abs ϑ nicht $\leqq 1$, sondern geradezu < 1 ist.

Vierter Hülfssatz. — *Es sei* $\mathfrak{H}$ *die Fläche eines Halbkreises vom Radius* R, *und* C *ihr Centrum, d. i. der Halbirungspunkt des die Fläche auf der einen Seite begrenzenden Durchmessers. Ferner sei* $\Omega = \Omega(x, y)$ *eine gegebene Function, die in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{H}$ *stetig ist. Denkt man sich ferner um* C *eine Kreisperipherie vom Radius* $r \leqq R$ *beschrieben, so mag der kleinste Werth, den* Ω *längs des zu* $\mathfrak{H}$ *gehörigen Theiles dieser Peripherie besitzt, mit* $\overline{\Omega_0}(r)$ *bezeichnet sein.*

Alsdann wird dieses $\Omega_0(r)$ *eine Function von* r *sein, die in Erstreckung des Intervalls* $(0, R)$ *stetig ist.*

Der Beweis dieses letzten Satzes ist offenbar ganz analog mit dem des vorhergehenden, eine weitere Erläuterung also unnöthig.

§ 18.

Untersuchung der Green'schen Function am Rande ihres Gebietes. Die sich zunächst darbietende Methode.

Die gegebene Randcurve des Gebietes $\mathfrak{J}$ mag von solcher Beschaffenheit sein, dass

(1.) θ, θ', θ'' *stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind, und dass überdies θ' überall $\geqq 0$ ist*).

Ist nun *innerhalb* $\mathfrak{J}$ ein fester Punkt c gegeben, so werden zufolge des Theorems pag. 82 drei Fundamentalfunctionen U, U_1, U_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren, von denen die erste am *Rande* von $\mathfrak{J}$ gleichwerthig ist mit $\log \frac{1}{r}$, wo r den von c aus nach dem Rande hinlaufenden Radiusvector vorstellt; während gleichzeitig für jeden Punkt (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{J}$ die Relationen stattfinden:

(2.) $$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 . \quad (!)$$

*) Hieraus folgt z. B., dass die Curve *überall convex* ist, jedoch der Art, dass sie auch geradlinige Strecken enthalten kann.

Demgemäss werden sämmtliche Krümmungskreise die Curve auf ihrer *innern* Seite berühren; und es wird also z. B. der in der Formel (*E.*) pag. 4 enthaltene Factor ε durchweg $= +1$ sein, jene Formel also die Gestalt annehmen:

$$R = \frac{1}{\theta'} .$$

Hieraus aber folgt, weil θ', zufolge der Voraussetzungen (1.), überall *stetig*, mithin auch überall *endlich* ist, dass der Krümmungsradius R überall > 0 ist.

Diese Function U pflegt man alsdann die dem Punkte c entsprechende *Green'sche Function*, und jenen Punkt c den *Centralpunkt* dieser Function zu nennen. Mehr im Sinne GREEN's würde es allerdings sein, als GREEN'sche Function nicht das U selber, sondern den Ausdruck

$$\Omega = \left(\log \frac{1}{r}\right) - U = -(U + \log r) \tag{3.}$$

zu bezeichnen, wo U den Werth der Function U in irgend einem Punkte (x, y), und r den Abstand dieses Punktes (x, y) von c vorstellen soll. Wie dem auch sei, — wir werden *beide* Functionen untersuchen, sowohl U wie Ω, und dabei vorzugsweise die Differentialquotienten

$$F = \frac{dU}{d\nu} \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{d\Omega}{d\nu} \tag{4.}$$

ins Auge fassen, wo ν die innere Normale der Randcurve vorstellen soll.

Aus der für U gegebenen Definition folgt sofort, dass Ω eine Function von (x, y) ist, die *am Rande* dieses Gebietes $\mathfrak{F}$ überall verschwindet, die ferner in jedwedem Punkte *innerhalb* des Gebietes > 0, und speciell im Punkte c positiv unendlich ist. Auch wird Ω für jedweden Theil des Gebietes $\mathfrak{F}$, der den Punkt c *nicht* enthält, als eine *Fundamentalfunction* zu bezeichnen sein.

Erläuterung. — Man denke sich um c, als Centrum, eine völlig innerhalb $\mathfrak{F}$ liegende äusserst kleine Kreisfläche construirt, und den nach Absonderung dieser Kreisfläche noch übrig bleibenden Theil des Gebietes $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}_{\sigma\varkappa}$ bezeichnet, indem man dabei unter σ und $\varkappa$ die beiden Randcurven dieses Theiles $\mathfrak{F}_{\sigma\varkappa}$, nämlich unter σ den ursprünglich gegebenen Rand des Gebietes $\mathfrak{F}$, andererseits aber unter $\varkappa$ die soeben construirte kleine Kreisperipherie versteht. Alsdann wird die in (3.) angegebene Function Ω offenbar, ebenso wie U selber, eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{F}_{\sigma\varkappa}$ sein.

Zufolge des ersten Satzes Abh. I, pag. 20 sind daher der grösste und der kleinste Werth, die Ω in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{F}_{\sigma\varkappa}$ besitzt, nothwendiger Weise *auf den Randcurven* dieses Gebietes, und *nur allein* auf diesen Randcurven anzutreffen. Hieraus aber ergiebt sich, weil Ω auf σ überall $= 0$, und auf $\varkappa$ überall ausserordentlich gross ist, Zweierlei, nämlich erstens, dass der kleinste Werth von Ω in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{F}_{\sigma\varkappa}$ die 0 ist, und zweitens, dass Ω in jedem Punkte *innerhalb* dieses Gebietes > 0 ist. Diese Resultate aber übertragen sich, wie man sofort übersieht, mit Leichtigkeit auf $\mathfrak{F}$ selber. — *Q. e. d.*

Denkt man sich auf der gegebenen Curve irgend eine *innere Normale* ν errichtet, die so kurz ist, dass sie den gegebenen Centralpunkt c nicht erreichen kann, und bezeichnet man einen *beliebigen* Punkt dieser Normale mit p, ferner den Fusspunkt derselben mit q, so werden die Functionen

$$(5\alpha.) \qquad F_p = \frac{dU_p}{d\nu} \quad \text{und} \quad \Phi_p = \frac{d\Omega_p}{d\nu}$$

längs der Normale ν (inclusive ihres Fusspunktes q) *stetig* sein. Und lässt man jetzt die Normale ν (sammt ihres Fusspunktes q) längs der gegebenen Curve fortwandern, so werden hierbei die Functionen

$$(5\beta.) \qquad F_q = \frac{dU_q}{d\nu} \quad \text{und} \quad \Phi_q = \frac{d\Omega_q}{d\nu}$$

Schritt für Schritt in *stetiger* Weise sich ändern.

Diese Sätze ergeben sich, soweit sie auf F Bezug haben, leicht mittelst der aus dem ersten Satze pag. 84 entspringenden Formeln:

$$F_p = \frac{dU_p}{d\nu} = (U_1)_p \cos\gamma + (U_2)_p \sin\gamma \ ,$$

$$F_q = \frac{dU_q}{d\nu} = (U_1)_q \cos\gamma + (U_2)_q \sin\gamma \ ,$$

wo die zugefügten Indices p und q die Werthe der betreffenden Functionen in den Punkten p und q andeuten, während γ das Azimuth der Normale ν gegen die x-Axe vorstellt. Denn einerseits sind U_1 und U_2 (als Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{T}$) in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{T}$ stetig; und andererseits wird γ, falls man die Normale ν längs der Curve fortwandern lässt, zufolge der Voraussetzungen (1.) sich Schritt für Schritt in stetiger Weise ändern.

Sobald aber die in Rede stehenden Sätze für F bewiesen sind, ergiebt sich sodann, auf Grund der Formel (3.), ihr Beweis auch für die Function Φ, falls man nur beachtet, dass die Normale ν so kurz gedacht werden soll, dass sie den gegebenen Centralpunkt c niemals erreicht.

Uebrigens sind die Sätze ($5\alpha.$, $\beta.$) einer etwas allgemeineren Fassung fähig. Bezeichnet man nämlich das von der gegebenen Curve σ und einer inneren Parallelcurve s begrenzte *ringförmige Gebiet* mit $\mathfrak{T}_{\sigma s}$, so ergiebt sich leicht*), dass die Functionen

$$(5\gamma.) \qquad F = \frac{dU}{d\nu} \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{d\Omega}{d\nu}$$

*) Etwa unter Anwendung des ersten Satzes pag. 101.

in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{I}_{\sigma s}$ *eindeutig und stetig* sind, falls man nur den gegenseitigen Abstand jener beiden Curven σ und s hinreichend klein macht.

Wir wenden uns jetzt zu Betrachtungen anderer Art. Da die Function Ω, wie schon bemerkt wurde (pag. 114), im Randpunkte q verschwindet, in allen übrigen Punkten der Normale ν aber > 0 ist, so erkennen wir sofort, *dass der Ausdruck*

$$\Phi_q = \frac{d\Omega_q}{d\nu} \quad \textit{stets} \quad \geqq 0 \tag{6.}$$

sein muss.

Schliessen zu wollen, dass er geradezu > 0 sei, würde offenbar voreilig sein. Denn es könnten ja z. B. die Werthe von Ω, als Ordinaten auf die Ebene des Gebietes $\mathfrak{I}$ senkrecht aufgesetzt gedacht, über der Linie ν eine Curve liefern, welche die Linie ν im Punkte q *berührt*, sonst aber durchweg oberhalb ν bleibt. Und alsdann würde der Differentialquotient (6.) nicht > 0, sondern $= 0$ sein.

Es handelt sich nun um die ebenso wichtige wie schwierige Frage, ob in der für alle Randpunkte q geltenden Formel (6.) *das zweifelhafte Zeichen* $\geqq$ *wirklich zu belassen sei, oder ob man vielleicht berechtigt ist, dasselbe durch das kategorische* $>$ *zu ersetzen.*

Da U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{I}$ ist, so ergeben sich, auf Grund bekannter GREEN'scher Sätze, für irgend einen Punkt j innerhalb $\mathfrak{I}$ folgende Formeln:

$$2\pi U_j = \int \left(U \frac{dT^j}{d\nu} - T^j \frac{dU}{d\nu} \right) d\sigma \,, \tag{7.}$$

[vgl. (40 ε.) *L. u. N. P.* pag. 19] ,

$$0 = \int \left(T^c \frac{dT^j}{d\nu} - T^j \frac{dT^c}{d\nu} \right) d\sigma \,, \tag{8.}$$

[vgl. (42 δ.) *L. u. N. P.* pag. 21] *) ,

die Integration ausgedehnt über alle Elemente $d\sigma$ der Randcurve. Dabei dient T als Abbreviatur für $\log \frac{1}{r}$, wo r den gegenseitigen Abstand zweier Punkte vorstellt; insbesondere beziehen sich T^j und T^c auf die Abstände $(j \rightarrowtail d\sigma)$ und $(c \rightarrowtail d\sigma)$, wo c den gegebenen Centralpunkt vorstellen soll. Um die Gleichung (7.) mit voller Strenge

*) Diese klein gedruckten Citate beziehen sich auf das Werk des Verfassers: »*Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*«. Leipzig, bei Teubner. 1877.

abzuleiten, hat man zuvörderst statt der eigentlichen Randcurve σ eine *innere Parallelcurve* anzuwenden. Aus der so erhaltenen Formel ergiebt sich alsdann die Gleichung (7.), sobald man den Abstand dieser Parallelcurve von der Randcurve zu 0 herabsinken lässt, und dabei Rücksicht nimmt auf den Satz (5γ.). — Beachtet man, dass U am Rande $= \log \frac{1}{r}$, d. i. $= T^c$ ist, so erhält man aus (7.) und (8.) durch Subtraction sofort:

$$2\pi U_j = \int \frac{d(T^c - U)}{d\nu} T^j d\sigma \,. \tag{9.}$$

Andererseits ergeben sich in analoger Weise für irgend einen Punkt a ausserhalb $\mathfrak{F}$ die Formeln:

$$2\pi T_a{}^c = -\int \left(T^c \frac{dT^a}{d\nu} - T^a \frac{dT^c}{d\nu} \right) d\sigma \,, \tag{10.}$$

[vgl. (42 ε.) *L. u. N. P.* pag. 21] ,

$$0 = -\int \left(U \frac{dT^a}{d\nu} - T^a \frac{dU}{d\nu} \right) d\sigma \,, \tag{11.}$$

[vgl. (40 δ.) *L. u. N. P.* pag. 19] *) ,

wo T^a und T^c respective den Abständen $(a \rightarrowtail d\sigma)$ und $(c \rightarrowtail d\sigma)$ zugehören, während T_a^c auf den Abstand $(c \rightarrowtail a)$ sich bezieht. Aus (10.) und (11.) folgt durch Subtraction:

$$2\pi T_a{}^c = \int \frac{d(T^c - U)}{d\nu} T^a d\sigma \,. \tag{12.}$$

Nun ist $T^c - U = \left(\log \frac{1}{r} \right) - U = \Omega$ [vgl. (3.)]; so dass also die beiden Formeln (9.) und (12.) die Gestalt gewinnen:

$$\begin{aligned} U_j &= \int \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\Omega}{d\nu} \right) T^j d\sigma \,, \\ T_a{}^c &= \int \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\Omega}{d\nu} \right) T^a d\sigma \,. \end{aligned} \tag{13.}$$

Demgemäss können U_j und T_a^c als Potentiale angesehen werden, die respective auf j und a ausgeübt werden von *ein und derselben* Curvenbelegung, deren Dichtigkeit η den Werth hat:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Omega}{d\nu} \,. \tag{14.}$$

Wir wollen jetzt annehmen, der Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$, mithin

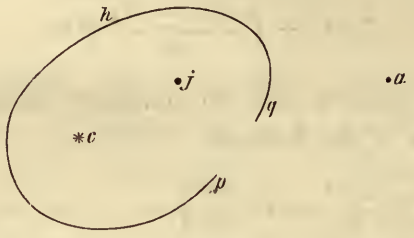
*) Auch diese Citate beziehen sich auf das genannte Werk.

auch η seien längs irgend eines *Elementes* pq der gegebenen Randcurve überall $= 0$, und die aus einer solchen Annahme sich ergebenden Consequenzen entwickeln.

Die beiden Potentiale (13.):

(15.) $$U_j \text{ und } T_a^c$$

werden alsdann von der Belegung der *ungeschlossenen* Curve qhp herrühren, mithin zusammengenommen eine Function bilden, die



durch die Oeffnung pq hindurch *stetig* ist. Hieran wird nichts geändert, sobald man von beiden Potentialen das von dem festen Punkte c herrührende Potential T^c in Abzug bringt; so dass also die beiden Ausdrücke

(16.) $$U_j - T_j^c \text{ und } T_a^c - T_a^c$$

zusammengenommen wiederum eine Function repräsentiren, die durch jene Oeffnung pq hindurch *stetig* ist. Da nun aber von diesen beiden Ausdrücken (16.) der *zweite* identisch verschwindet, so ergiebt sich hieraus nach bekanntem Satze, dass der *erstere* ebenfalls verschwindet, und zwar für sämmtliche Punkte j; was mit der Natur dieses Ausdruckes in offenbarem Widerspruch steht. Wir sehen somit, dass die gemachte Annahme *unhaltbar* ist, und gelangen daher zu folgendem Satze:

Der in (6.) *genannte Differentialquotient*:

(17.) $$\Phi_q = \frac{d\Omega_q}{d\nu}$$

*kann niemals in sämmtlichen Punkten eines Randelementes verschwinden, wie klein man sich dieses Element auch denken möge**). —

Ob aber dieser Differentialquotient nicht vielleicht in *einzelnen* Punkten des Randes verschwinden kann, — diese Frage scheint

*) Dieses Resultat ist schon *früher* vom Verf. abgeleitet worden. Vgl. das in den beiden vorhergehenden Noten genannte Werk, pag. 77.

bisher noch niemals in Angriff genommen, und überhaupt mit grossen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Um so mehr dürfte es gerechtfertigt sein, wenn ich die beiden folgenden Paragraphe dazu verwende, um die von mir in dieser Richtung angestellten Untersuchungen in sorgfältiger Weise darzulegen.

Beiläufig sei bemerkt, dass man durch die in diesem Paragraph dargelegte Methode z. B. auch zu folgendem Satze gelangen kann:

Satz. *) — *Ist längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(α.) θ, θ', θ'' *und* f, f' *stetig sind, dass ferner* f'' *abtheilungsweise stetig ist, und dass endlich* θ' *überall* $\geqq 0$ *ist,*

so werden die den Werthen f *entsprechenden Fundamentalfunctionen* Φ *und* Ψ *der Gebiete* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *nicht allein existiren, sondern auch mit den früher (Theorem pag. 82) angegebenen Eigenschaften behaftet sein.*

Gleichzeitig werden alsdann sämmtliche Werthe, welche Φ *und* Ψ *in Erstreckung von* $\mathfrak{A}$, *resp. in Erstreckung von* $\mathfrak{B}$ *besitzen, abgesehen von einer additiven Constante, darstellbar sein als die Potentiale ein und derselben Curvenbelegung auf äussere, resp. auf innere Punkte.*

Es werden nämlich folgende Formeln gelten:

(β.)
$$\Phi_x = \Gamma + \int T_x \delta \, d\sigma \ , \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{A}) \ ,$$
$$\Psi_x = \Gamma + \int T_x \delta \, d\sigma \ , \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{B}) \ ,$$

wo $T_x = \log \frac{1}{E_x}$ *ist, und* E_x *den Abstand des Elementes* $d\sigma$ *vom Punkte* x *vorstellt, während* Γ *eine bestimmte endliche Constante, nämlich den Werth von* Φ *im Unendlichen repräsentirt,* [vgl. Abh. I, pag. 22 (4.)].

Dabei bezeichnet, was besonders zu betonen ist, δ *eine längs der Curve stetige Function. Auch ist der Werth dieser Function darstellbar durch die Formel:*

(γ.)
$$\delta = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\Phi - \Psi)}{d\nu} \ ,$$

wo ν *die innere Normale der Curve vorstellt.*

---

*) Vgl. den von mir im Jahre 1878 in den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. publicirten Aufsatz, insbesondere den III. und IV. Fundamentalsatz, daselbst pag. 52 und 54.

§ 19.

Fortsetzung. Die Methode der berührenden Kreisfläche.

Für diesen und den folgenden Paragraph wird es, zur Vereinfachung der Darstellung, gut sein, folgenden Hülfssatz voranzuschicken:

Hülfssatz. — *Es seien* [vgl. die folgende Figur] BCD *und* HCH_1 *zwei aufeinander senkrechte Durchmesser einer um* C *mit dem Radius* A *beschriebenen Kreisperipherie. Ferner sei* p *ein auf dem Radius* CD *gelegener Punkt, dessen Centraldistanz* $= r$ *ist. Ueberdies mögen auf der Peripherie zu beiden Seiten von* D *zwei Punkte* N *und* N_1 *in solcher Weise markirt sein, dass* N, p, H_1 *in gerader Linie, und andererseits* N_1, p, H *ebenfalls in gerader Linie liegen. Endlich sei* S *ein längs der Peripherie herumlaufender Punkt, und* E *der von Augenblick zu Augenblick sich ändernde Abstand dieses Punktes* S *vom festen Punkte* p.

Alsdann wird die von E *abhängende Function*

$$(\alpha.) \qquad f = f(E) = \frac{1}{2\pi A r}\left(\frac{A^2 + r^2}{E^2} - \frac{(A^2 - r^2)^2}{E^4}\right)$$

in dem Augenblicke $= 0$ *sein, in welchem* S *in* N *sich befindet, sodann* > 0 *sein, während* S, *von* N *aus, längs der Peripherie über* B *nach* N_1 *geht, wieder* $= 0$ *werden, sobald* B *in* N_1 *anlangt, und endlich* < 0 *sein, während* S, *seine Wanderung längs der Peripherie fortsetzend, von* N_1 *über* D *nach* N *geht. Oder genauer ausgedrückt: Es wird diese Function* f *längs der Strecke* NBN_1 *positiv, längs der Strecke* N_1DN *negativ sein, und im Ganzen nur zwei Nullpunkte haben, die in* N *und* N_1 *liegen. Insbesondere wird ihr Werth längs des Halbkreises* HBH_1 *durchweg*

$$(\beta.) \qquad \geqq \frac{r}{16\pi A^3}$$

sein.

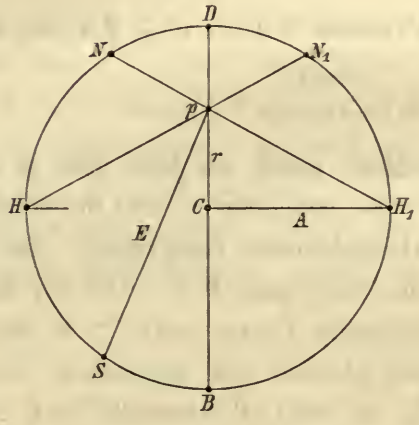
Dabei mag noch bemerkt sein, dass man die negative Strecke N_1DN *durch Vergrösserung von* r *beliebig klein machen kann; wie solches aus der für die Punkte* N, N_1 *angegebenen Construction sofort sich ergiebt.*

Beweis. — Aus der Formel ($\alpha.$) folgt sofort, dass die Function $f = f(E)$ nur für *einen einzigen* Werth von E verschwindet. Dieser Werth lautet:

$$E = \frac{A^2 - r^2}{\sqrt{A^2 + r^2}} = \frac{(A - r)(A + r)}{\sqrt{A^2 + r^2}} ,$$

und ist daher [vgl. die Figur] auch so darstellbar:

$$E = \frac{(p\,D)\,(p\,B)}{(p\,H_1)} ,$$



oder auch so:

$$E = (pN) = (pN_1) .$$

Folglich repräsentiren N und N_1 die beiden *einzigen* Lagen des peripherischen Punktes S, für welche f verschwindet. Folglich hat f längs NBN_1 *constantes* Vorzeichen, und ebenso längs N_1DN. Dass aber ersteres $+$, und letzteres $-$ ist, erkennt man sofort aus den in B und D, d. i. für $E = A + r$ und $E = A - r$ sich ergebenden Werthen:

$$\begin{cases} \text{Werth in } B\text{:} & f(A + r) = + \dfrac{1}{\pi(A + r)^2} , \\ \text{Werth in } D\text{:} & f(A - r) = - \dfrac{1}{\pi(A - r)^2} . \end{cases}$$

Um schliesslich die Behauptung (β.) zu beweisen, bemerken wir, dass für alle Punkte S des Halbkreises HBH_1 die Relation stattfindet:

(ϱ.) $$A \leqq E \leqq 2A ,$$

dass mithin die Function

$$f = \frac{(A^2 + r^2)E^2 - (A^2 - r^2)^2}{2\pi A r E^4}$$

für die Punkte S des genannten Halbkreises der Formel entspricht:

$$f \geqq \frac{(A^2+r^2)A^2-(A^2-r^2)^2}{2\pi A r E^4} = \frac{r^2(3A^2-r^2)}{2\pi A r E^4} .$$

Diese Formel aber kann, mit abermaliger Rücksicht auf (ϱ.), auch so geschrieben werden:

$$f \geqq \frac{r^2(3A^2-r^2)}{2\pi A r (2A)^4} ,$$

oder, weil $r^2 \leqq A^2$, mithin $3A^2 - r^2 \geqq 2A^2$ ist, auch so:

$$f \geqq \frac{r^2 \cdot 2A^2}{2\pi A r (2A)^4} = \frac{r}{16\pi A^3} . \quad \text{— } Q.\ e.\ d.$$

Dies vorangeschickt, gehen wir jetzt über zu unserm eigentlichen Thema, indem wir dabei festhalten an den Bezeichnungen und Voraussetzungen des vorhergehenden Paragraphs. Aus jenen Voraussetzungen folgt [vgl. die Note pag. 113], dass der *kleinste* Krümmungsradius R_0 der gegebenen Curve stets > 0 ist. Bezeichnet man ferner den *kürzesten* Abstand des gegebenen Centralpunktes c von der Curve mit $2P_0$, so wird P_0 ebenfalls > 0 sein (weil c *innerhalb* $\mathfrak{F}$ liegen soll). Bezeichnet nun A eine den Formeln:

(1.) $$0 < A < R_0 \quad \text{und} \quad 0 < A < P_0$$

unterworfene, sonst aber beliebig gewählte Constante, und denkt man sich einen Kreis $\mathfrak{K}$ vom Radius A construirt, der die gegebene Curve in irgend einem Punkte q von Innen berührt, so wird die Peripherie dieses Kreises, ausser dem Punkte q, keinen weiteren Punkt mit der gegebenen Curve gemein haben [Zweiter Satz pag. 101]. Demgemäss wird die *Fläche* dieses Kreises $\mathfrak{K}$ ein *Theil* des Gebietes $\mathfrak{F}$ sein.

Ueberdies erkennt man leicht, dass der gegebene Centralpunkt c *ausserhalb* des Kreises $\mathfrak{K}$ liegt. Denn befände sich c *innerhalb* $\mathfrak{K}$, oder *am Rande* von $\mathfrak{K}$, so würde der Abstand $(cq) \leqq 2A$, also, nach (1.), $< 2P_0$ sein. Es würde also in diesem Falle der Punkt c vom Curvenpunkte q einen Abstand haben, der $< 2P_0$ ist; während doch $2P_0$ den *kürzesten* Abstand jenes Punktes c von der Curve vorstellen soll.

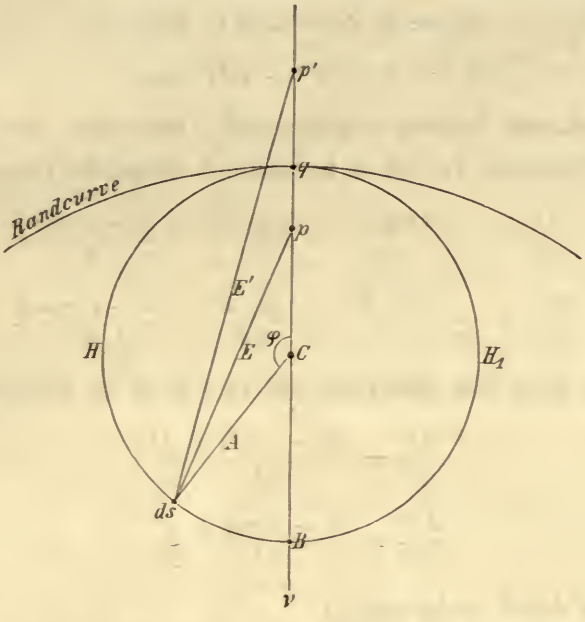
Da nun die Fläche $\mathfrak{K}$ ein *Theil* von $\mathfrak{F}$ ist, und der Punkt c *ausserhalb* $\mathfrak{K}$ liegt, so ergiebt sich hieraus sofort, dass die Functionen U und Ω *Fundamentalfunctionen des Gebietes* $\mathfrak{K}$ sind. Markirt man daher irgend einen Punkt p *innerhalb* $\mathfrak{K}$, und zugleich auch irgend einen Punkt p' *ausserhalb* $\mathfrak{K}$, so gelten die Formeln:

(2.) $$0 = \int \frac{d\Omega}{dn}\, ds \;,$$ [vgl. *L. u. N. P.* (40δ.) pag. 19],

(3.) $$2\pi\Omega_p = \int \left(\Omega \frac{dT}{dn} - T\frac{d\Omega}{dn}\right) ds \;,$$ [vgl. *L. u. N. P.* (40ε.) pag. 19],

(4.) $$0 = \int \left(\Omega \frac{dT'}{dn} - T'\frac{d\Omega}{dn}\right) ds \;,$$ [vgl. *L. u. N. P.* (40δ.) pag. 19]*),

wo die Integration hinläuft über alle Randelemente ds des Kreises $\mathfrak{K}$, und wo n die innere Normale des Elementes ds repräsentirt. Dabei bezeichnet Ω_p den Werth von Ω in p; während T und T' respective den Entfernungen $(p \rightarrow ds)$ und $(p' \rightarrow ds)$ angehören. All' diese Formeln (2.), (3.), (4.) ergeben sich, ebenso wie die auf pag. 116 besprochenen, mit absoluter Strenge durch Anwendung der auch damals benutzten Parallelcurven. (Vgl. pag. 117.)



Es mögen nun die beiden Punkte p und p' in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}$, dessen Centrum C heissen soll, zu einander *conjugirt* sein; sodass also z. B. zwischen ihren Centraldistanzen r und r' die Relation stattfindet

(5.) $$rr' = A^2 \;.$$

Ueberdies liege p auf dem Radius Cq, mithin p' auf der Verlänge-

*) Diese Citate beziehen sich auf das in der Note pag. 116 genannte Werk.

rung dieses Radius. Bezeichnet man alsdann die Abstände eines Elementes ds von den drei Punkten C, p, p' respective mit A, E, E', so sind, zufolge (5.), die beiden Dreiecke EAr und $E'r'A$ einander ähnlich; woraus folgt:

$$\frac{E}{E'} = \frac{A}{r'} = \frac{r}{A} . \tag{6.}$$

Somit ergiebt sich:

$$\log \frac{1}{E'} - \log \frac{1}{E} = \log \frac{r}{A} ,$$

d. i.

$$T' - T = \log \frac{r}{A} . \tag{7.}$$

Bezeichnet man ferner in jenen beiden Dreiecken den den Seiten E und E' gegenüberliegenden Winkel mit φ, so ist:

$$\begin{aligned} E^2 &= A^2 + r^2 - 2Ar \cos\varphi , \\ E'^2 &= A^2 + r'^2 - 2Ar' \cos\varphi . \end{aligned} \tag{8.}$$

Und mit Rücksicht hierauf ergeben sich, falls man die *innere* Normale des Elementes ds mit n bezeichnet, folgende Formeln:

$$\frac{dT}{dn} = -\frac{d\log E}{dn} = \frac{\partial \log E}{\partial A} = \frac{A - r\cos\varphi}{E^2} ,$$

$$\frac{dT'}{dn} = -\frac{d\log E'}{dn} = \frac{\partial \log E'}{\partial A} = \frac{A - r'\cos\varphi}{E'^2} ,$$

Formeln, die man mit Rücksicht auf (6.) auch so schreiben kann:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dn} &= \frac{A - r\cos\varphi}{E^2}\frac{A^2}{A^2} , \\ \frac{dT'}{dn} &= \frac{A - r'\cos\varphi}{E^2}\frac{r^2}{A^2} . \end{aligned} \tag{9.}$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn} = \frac{A(r^2 - A^2) - r(rr' - A^2)\cos\varphi}{A^2E^2} ,$$

also mit Rücksicht auf (5.):

$$\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn} = \frac{r^2 - A^2}{AE^2} . \tag{10.}$$

Subtrahirt man jetzt die beiden Formeln (3.), (4.) von einander, so erhält man mit Rücksicht auf (7.) und (10.):

$$-2\pi\Omega_p = \int \Omega \frac{r^2 - A^2}{AE^2}\, ds - \left(\log \frac{r}{A}\right) \int \frac{d\Omega}{dn}\, ds\,,$$

also mit Rücksicht auf (2.):

$$(11.) \qquad -\Omega_p = \int \Omega \frac{r^2 - A^2}{2\pi A E^2}\, ds\,,$$

eine Formel, die sich ohne Weiteres nach r differenziren lässt.

Aus (8.) folgt sofort:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 - A^2}{2\pi A E^2}\right) = \frac{2Ar - (A^2 + r^2)\cos\varphi}{\pi E^4}\,,$$

oder, falls hier für $\cos\varphi$ der aus (8.) entspringende Werth substituirt wird:

$$(12.) \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 - A^2}{2\pi A E^2}\right) = \frac{1}{2\pi A r}\left(\frac{A^2 + r^2}{E^2} - \frac{(A^2 - r^2)^2}{E^4}\right), \quad \text{d. i.} = f\,,$$

wo f die in (α.) pag. 120 besprochene Function repräsentirt. Differenzirt man also die Formel (11.) nach r, so erhält man:

$$(13.) \qquad -\frac{d\Omega_p}{dr} = \int \Omega f\, ds\,,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(14.) \qquad -\frac{d\Omega_p}{dr} = \int_{qHB} \Omega f\, ds + \int_{BH_1q} \Omega\, ds\,,$$

wo alsdann das eine Integral über den Halbkreis qHB, das andere über den Halbkreis BH_1q hinerstreckt zu denken ist [vgl. die vorhergehende Figur].

Diese Formel (13.) oder (14.) gilt offenbar (wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht) nicht nur für die Function Ω, sondern ganz allgemein für *jedwede* Fundamentalfunction der Kreisfläche $\mathfrak{K}$. Sie wird also z. B. richtig bleiben, wenn man in ihr statt Ω eine *Constante*, etwa die Zahl 1, nimmt. Somit folgt:

$$0 = \int_{qHB} f\, ds + \int_{BH_1q} f\, ds\,.$$

Hieraus aber folgt, weil f lediglich von E abhängt, mithin diese beiden Integrale einander *gleich* sind, dass jedes derselben *einzeln* $= 0$ ist; sodass man also die Formeln erhält:

$$\int_{qHB} f\, ds = 0 \quad \text{und} \quad \int_{BH_1q} f\, ds = 0\,.$$

Und mit Rücksicht hierauf kann man die Formel (14.) auch so schreiben:

$$(15.) \qquad -\frac{d\Omega_p}{dr} = \int_{qHB} (\Omega - k) f ds + \int_{BH_1q} (\Omega - k_1) f ds \ ,$$

wo k und k_1 *willkürlich zu wählende Constanten* vorstellen.

Bezeichnet man jetzt [vgl. die vorhergehende Figur] die im Punkte q auf der gegebenen Curve errichtete innere Normale qCB kurzweg mit ν, und beachtet man, dass die zu untersuchende Function Φ_p [pag. 115] die Bedeutung hat:

$$(16.) \qquad \Phi_p = \frac{d\Omega_p}{d\nu} = -\frac{d\Omega_p}{dr} \ ,$$

so folgt aus (15.):

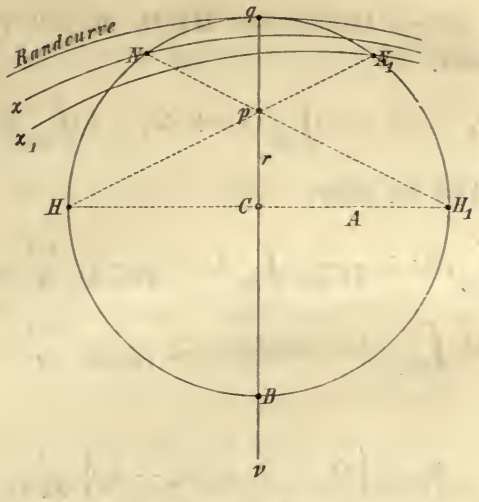
$$(17.) \qquad \Phi_p = \int_{qHB} (\Omega - k) f ds + \int_{BH_1q} (\Omega - k_1) f ds \ .$$

Um von dieser Formel (17.) Nutzen zu ziehen, wollen wir (vgl. die folgende Figur) die Niveaucurven

$$(18.) \qquad \Omega = \text{Const.}$$

ins Auge fassen. Offenbar werden wir diese das ganze Gebiet $\mathfrak{F}$ erfüllenden Niveaucurven dadurch erhalten, dass wir die Const. von 0 zu $+\infty$ wachsen lassen. Und zwar wird die Curve $\Omega = \text{Const.}$, falls wir die Const. zuerst $= 0$ machen, sodann allmählich wachsen, und schliesslich $= +\infty$ werden lassen, zuerst identisch sein mit der Randcurve, sodann sich ein wenig verkleinern und mit dieser Randcurve nahezu parallel werden, hierauf sich mehr und mehr zusammenziehen, und schliesslich zu dem gegebenen Centralpunkte c zusammenschrumpfen.

Denken wir uns nun den Centralabstand r des Punktes p sehr wenig kleiner als den Kreisradius A, mithin p sehr nahe an q, so werden auch die [mittelst der punktirten Linien sich bestimmenden] Punkte N und N_1 sehr nahe an q liegen; es werden daher in diesem Falle die durch N und N_1 gehenden Niveaucurven $\varkappa$ und $\varkappa_1$ dem Rande von $\mathfrak{F}$ sehr nahe liegen, und mit diesem Rande nahezu parallel sein; sodass also z. B. der Halbkreis qHB von der Curve $\varkappa$ nur in dem *einen* Punkte N, und ebenso der Halbkreis BH_1q von der Curve $\varkappa_1$ nur in dem *einen* Punkte N_1 geschnitten wird. Bezeichnet also k den constanten Werth von Ω längs der Niveaucurve $\varkappa$, so



wird $(\Omega - k)$ längs des Kreisbogens qN durchweg *negativ*, und längs des Kreisbogens NHB durchweg *positiv* sein. Genau dasselbe gilt aber, zufolge unseres Hülfssatzes*) pag. 120, auch von der Function f. *Folglich ist das Product* $(\Omega - k)f$ *längs des ganzen Halbkreises* qHB *überall positiv.* Analoges gilt offenbar von dem Producte $(\Omega - k_1)f$ mit Bezug auf den *andern* Halbkreis BH_1q, falls nämlich k_1 den constanten Werth der Function Ω längs der Niveaucurve z_1 vorstellt.

Denkt man sich also in der Formel (17.) den dortigen Constanten k und k_1 die soeben definirten Werthe zuertheilt, so wird jedes der dortigen beiden Integrale eine Summe von lauter *positiven* Gliedern sein, mithin *verkleinert* werden, sobald man irgend welchen Theil dieser Glieder fortlässt, also z. B. *verkleinert* werden, sobald man die dortigen Integrationen nicht über die Halbkreise

$$qHB \quad \text{und} \quad BH_1q \ ,$$

sondern nur über die Kreisquadranten

$$HB \quad \text{und} \quad BH_1$$

sich hinerstrecken lässt. Somit ergiebt sich aus (17.):

18.) $$\Phi_p \geqq \int_{HB} (\Omega - k)f\,ds + \int_{BH_1} (\Omega - k_1)f\,ds \ .$$

Bezeichnet man daher den *kleinsten* Werth von Ω längs des Halbkreises HBH_1 mit Ω_0, und beachtet man, dass f, zufolge des Hülfssatzes

*) Die Bezeichnungen in jenem Hülfssatze sind genau dieselben wie hier, nur mit dem Unterschiede, dass der Punkt q dort mit D benannt ist.

pag. 120, längs dieses Halbkreises HBH_1 überall *positiv* ist, so erhält man *a fortiori:*

$$\Phi_p \geqq (\Omega_0 - k)\int_{HB} f\,ds + (\Omega_0 - k_1)\int_{BH_1} f\,ds\,. \tag{19.}$$

Nach (β.) pag. 120 ist aber:

$$\begin{cases} \int_{HB} f\,ds \geqq \frac{r}{16\pi A^3}\int_{HB} ds = \frac{r}{16\pi A^3}\,\frac{\pi A}{2}\,, \\ \text{und } \int_{BH_1} f\,ds \quad \text{ebenfalls } \geqq \frac{r}{16\pi A^3}\,\frac{\pi A}{2}\,. \end{cases}$$

Somit folgt:

$$\Phi_p \geqq \Big((\Omega_0 - k) + (\Omega_0 - k_1)\Big)\,\frac{r}{32A^2} \tag{20.}$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$\Phi_p - \Big(2\,\Omega_0 - k - k_1\Big)\,\frac{r}{32A^2} \geqq 0\,. \tag{21.}$$

Diese Formel wird, ihrer Entstehung zufolge, gültig sein nicht nur für das *augenblicklich betrachtete* r, sondern auch für jedes grössere r, falls nur dasselbe $< A$ bleibt. Sie wird also, falls man dieses augenblickliche r mit a bezeichnet, gültig sein für jedwedes der Bedingung $a \leqq r < A$ entsprechende Argument r. Bezeichnet man daher die linke Seite dieser Formel (21.) mit $F(r)$, so ist:

$$F(r) \geqq 0 \quad \text{für} \quad a \leqq r < A\,. \tag{22.}$$

Dabei ist $F(r)$ eine *in ganzer Erstreckung des Intervalls a ... A stetige* Function. Denn einerseits sind k, k_1 und Φ_p Functionen von r, die einer derartigen Stetigkeit sich erfreuen, wie solches theils aus der Bedeutung von k, k_1, theils aus dem Satze ($5\,\alpha$.) pag. 115 hervorgeht. Und andererseits ist Ω_0 (der Mininalwerth von Ω längs des Halbkreises HBH_1), ebenso wie der Radius A, eine *Constante.*

Mit Rücksicht auf diese Stetigkeit der Function $F(r)$ folgt nun aus der Formel (22.) sofort, dass

$$F(A) \geqq 0 \tag{23.}$$

ist. Denn wollte man annehmen, es sei $F(A) < 0$, so müssten, in Anbetracht der soeben besprochenen Stetigkeit von $F(r)$, in unmittelbarer Nähe von A Argumente $r < A$ existiren, für welche $F(r)$ ebenfalls < 0 wäre; was mit (22.) in Widerspruch steht.

Die in solcher Weise constatirte Formel (23.) nimmt nun, falls man für $F(A)$ seine eigentliche Bedeutung eintreten lässt, die Gestalt an:

$$\Phi_q - 2\Omega_0 \frac{A}{32A^2} \geqq 0\ , \quad \text{d. i.} \quad \Phi_q \geqq \frac{\Omega_0}{16A}\ . \tag{24.}$$

Denn für $r = A$ geht Φ_p in Φ_q über, während k und k_1 hierbei zu 0 werden.

Nun war aber q ein beliebiger Randpunkt. Und wir ersehen also aus (24.), *dass* Φ *in jedwedem Randpunkte* > 0 *ist*; *womit die auf pag.* 116 *aufgeworfene Frage beantwortet ist.*

Indessen lässt die Methode, durch welche wir hier zu diesem Resultate gelangt sind, Manches zu wünschen übrig, insofern als uns vorläufig noch die Mittel fehlen dürften, um das Operiren mit Niveaucurven mit wirklicher Strenge zu vereinen; wie denn z. B. auch die vorhin (pag. 126) ausgesprochene Behauptung, dass der Halbkreis qHB von der Niveaucurve z immer nur in *einem einzigen* Punkte geschnitten wird, ohne wirklichen Beweis geblieben ist.

Immerhin dürfte die hier exponirte Methode eine passende Einleitung sein für diejenige *wirklich strenge*, aber auch *complicirtere* Methode, von welcher der folgende Paragraph handeln soll.

§ 20.

Fortsetzung. Methode der übergreifenden Kreisfläche.

Wir halten fest an den Bezeichnungen und Voraussetzungen der beiden vorhergehenden Paragraphe, und denken uns also z. B. die gegebene Curve von solcher Beschaffenheit [vgl. (1.) pag. 113], dass

(1.) θ, θ' θ'' *stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind, und dass ausserdem θ' überall $\geqq 0$ ist.

Es sei nun R_0 der *kleinste* Krümmungsradius der Curve, ferner sei $2P_0$ der *kürzeste* Abstand des innerhalb $\mathfrak{I}$ gegebenen Centralpunktes c von dieser Curve, endlich sei A irgend eine den beiden Bedingungen

$$0 < A < R_0 \quad \text{und} \quad 0 < A < P_0 \tag{2.}$$

entsprechende Constante. Denkt man sich alsdann einen Kreis $\mathfrak{K}$ vom Radius A construirt, der die gegebene Curve in irgend einem

Punkte q von Innen berührt, so wird der Centralpunkt c *ausserhalb* der Kreisfläche $\mathfrak{K}$ liegen, mithin

$$A < (Cc) \tag{3.}$$

sein, wo C das Centrum der Fläche $\mathfrak{K}$ vorstellt. Auch wird alsdann diese Fläche $\mathfrak{K}$ ein Theil von $\mathfrak{J}$ sein. Und zwar wird die Peripherie der Fläche $\mathfrak{K}$, ausser dem Berührungspunkte q, *keinen weiteren* Punkt mit dem Rande von $\mathfrak{J}$, d. i. mit der gegebenen Curve gemein haben.

Diese bereits früher (pag. 122) constatirten einfachen Sätze bilden das Fundament der jetzt anzustellenden Betrachtungen. Denken wir uns um das Centrum C des mit dem Radius A beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$ einen zweiten Kreis $\mathfrak{K}^*$ vom Radius $A + \alpha^*$ beschrieben, und dabei $(A + \alpha^*)$ der Bedingung unterworfen:

$$A < A + \alpha^* < (Cc) \ , \tag{4.}$$

so wird offenbar der Centralpunkt c nicht nur ausserhalb $\mathfrak{K}$, sondern auch ausserhalb $\mathfrak{K}^*$ liegen.

Gleichzeitig aber wollen wir die neue Constante α^* so klein uns denken, dass die Peripherie $\mathfrak{K}^*$ die gegebene Curve in *zwei* zu beiden Seiten von q gelegenen Punkten schneidet, sonst aber *keine weiteren* Punkte mit der Curve gemein hat, und dass Gleiches auch gilt von jedweder um C beschriebenen Peripherie, deren Radius $(A + \alpha)$ der Relation entspricht

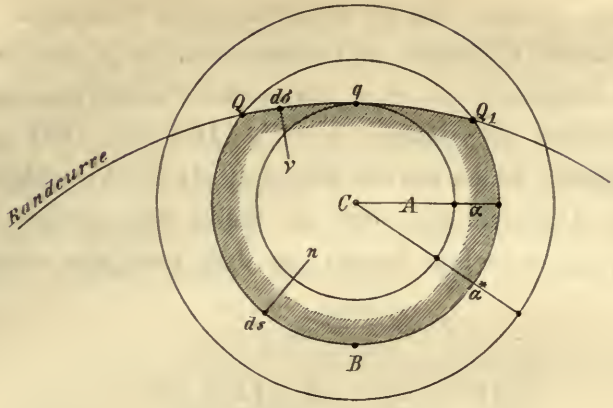
$$A < A + \alpha \leqq A + \alpha^* \ . \tag{5.}$$

Dass eine derartige Bestimmungsweise der Constante $(A + \alpha^*)$, bei den von uns gemachten Voraussetzungen (1.), stets möglich ist, ergiebt sich sofort aus dem dritten Satze pag. 101. Denn es wird zu diesem Zwecke nur erforderlich sein, dieses $(A + \alpha^*) < \varrho^*$ zu machen, wo ϱ^* die dort besprochene Constante vorstellt.

Bezeichnet man den innerhalb der Peripherie $(A + \alpha)$ befindlichen Theil des Gebietes $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{K}_\alpha$, so wird $\mathfrak{K}_\alpha$ theils von jener Peripherie selber, theils von einer gewissen Strecke $Q q Q_1$ der gegebenen Curve begrenzt, und in Q und Q_1 mit zwei Ecken versehen sein. Dieses Gebiet $\mathfrak{K}_\alpha$ ist in beistehender Figur durch Schraffirung hervorgehoben. Die aus (4.), (5.) entspringende Formel

$$A < A + \alpha \leqq A + \alpha^* < (Cc) \tag{6.}$$

zeigt, dass der Centralpunkt c stets *ausserhalb* $\mathfrak{K}_\alpha$ liegt. Demgemäss



sind also U und Ω *Fundamentalfunctionen* des Gebietes $\mathfrak{K}_\alpha$. Ist mithin p irgend ein Punkt *innerhalb* $\mathfrak{K}_\alpha$, und p' ein beliebiger Punkt *ausserhalb* $\mathfrak{K}_\alpha$, so ergeben sich folgende mit (2.), (3.), (4.) pag. 123 analoge Formeln:

$$(7.) \qquad 0 = \int \frac{d\Omega}{dn}\, ds + \int \frac{d\Omega}{d\nu}\, d\sigma \;,$$

$$(8.) \qquad 2\pi\,\Omega_p = \int \left(\Omega \frac{dT}{dn} - T\frac{d\Omega}{dn}\right) ds + \int \left(\Omega \frac{dT}{d\nu} - T\frac{d\Omega}{d\nu}\right) d\sigma \;,$$

$$(9.) \qquad 0 = \int \left(\Omega \frac{dT'}{dn} - T'\frac{d\Omega}{dn}\right) ds + \int \left(\Omega \frac{dT'}{d\nu} - T'\frac{d\Omega}{d\nu}\right) d\sigma \;,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente ds der das Gebiet $\mathfrak{K}_\alpha$ begrenzenden Kreisbogenstrecke QBQ_1 [vgl. die Figur], und über alle Elemente $d\sigma$ der zur gegebenen Curve gehörigen Strecke Q_1qQ. Dabei bezeichnen n und ν die auf ds und $d\sigma$ errichteten, in das Innere von $\mathfrak{K}_\alpha$ hineinlaufenden Normalen. Ferner haben T und T' die Bedeutungen:

$$(10.) \qquad T = \log\frac{1}{E} \;, \quad T' = \log\frac{1}{E'} \;,$$

wo E und E' die Abstände der beiden Punkte p und p' von ds, respective von $d\sigma$ vorstellen.

Subtrahirt man die beiden Formeln (8.) und (9.) von einander, und beachtet man dabei, dass die Function Ω längs des Randes von $\mathfrak{F}$, also z. B. auch längs der Curvenstrecke Q_1qQ überall $= 0$ ist, so folgt:

$$(11.) \qquad -2\pi\,\Omega_p = \int \left(\Omega\left(\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn}\right) - (T' - T)\frac{d\Omega}{dn}\right) ds - \int (T' - T)\frac{d\Omega}{d\nu}\, d\sigma \,.$$

Lässt man nun, ebenso wie im vorhergehenden Paragraph, den Punkt p auf den Radius Cq fallen, und nimmt man für p' den zu p in Bezug auf die Peripherie $(A+\alpha)$ *conjugirten* Punkt [vgl. die folgende Figur], so werden die damals in (7.), (10.) pag. 124 gefundenen Formeln Gültigkeit haben für alle Elemente ds des Kreisbogens QBQ_1, nur mit dem Unterschiede, dass an Stelle des dortigen A gegenwärtig $(A+\alpha)$ zu stehen kommt; so dass man also erhält:

$$T' - T = \log \frac{r}{A+\alpha} ,$$

$$\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn} = \frac{r^2 - (A+\alpha)^2}{(A+\alpha)E^2} ,$$

wo r den Centralabstand (Cp) des Punktes p vorstellt, während E den Abstand dieses Punktes vom Elemente ds bezeichnet. Demgemäss folgt aus (11.):

$$-2\pi\Omega_p =$$

$$= \int \Omega \frac{r^2 - (A+\alpha)^2}{(A+\alpha)E^2} ds - \left(\log \frac{r}{A+\alpha}\right) \int \frac{d\Omega}{dn} ds - \int (T' - T) \frac{d\Omega}{d\nu} d\sigma ,$$

oder, falls man das *zweite* dieser drei Integrale durch den aus (7). entspringenden Werth ersetzt, und zugleich die Formeln (10.) beachtet,

(12.)
$$-2\pi\Omega_p =$$

$$= \int \Omega \frac{r^2 - (A+\alpha)^2}{(A+\alpha)E^2} ds + \int \left(\log \frac{r}{A+\alpha} + \log E' - \log E\right) \frac{d\Omega}{d\nu} d\sigma .$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung:

(13.)
$$f = \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 - (A+\alpha)^2}{2\pi(A+\alpha)E^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(A+\alpha)r}\left(\frac{(A+\alpha)^2 + r^2}{E^2} - \frac{[(A+\alpha)^2 - r^2]^2}{E^4}\right) ,$$

[vgl. die analoge Formel (12.) pag. 125], so ergiebt sich aus (12.) durch Differentiation nach r:

(14.)
$$-\frac{d\Omega_p}{dr} = \int_{QBQ_1} \Omega f ds + \frac{1}{2\pi} \int_{Q_1 q Q} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{E'}\frac{dE'}{dr} - \frac{1}{E}\frac{dE}{dr}\right) \frac{d\Omega}{d\nu} d\sigma ,$$

wo der grösseren Deutlichkeit willen die Integrationswege durch Indices markirt sind.

Nun haben wir [vgl. (5α.) pag. 115] unter Φ_p den Differentialquotienten von Ω_p nach der durch p gehenden Normale ν verstanden. Demgemäss ist [vgl. etwa die nächstfolgende Figur]:

$$\Phi_p = \frac{d\Omega_p}{dr'} = -\frac{d\Omega_p}{dr} .$$

Somit folgt aus (14.):

$$(15.)\quad \Phi_p = \int_{QBQ_1} \Omega f ds + \frac{1}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{E'}\frac{dE'}{dr} - \frac{1}{E}\frac{dE}{dr}\right)\Phi d\sigma ,$$

wo im letzten Integral Φ den Werth dieser Function im Elemente $d\sigma$ vorstellt. Hieraus ergiebt sich leicht [vgl. die nachfolgende Erläuterung]:

$$(16.)\quad \Phi_p = \int_{QBQ_1} \Omega f ds + \frac{1}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\left(\frac{1}{r} - \frac{(A+\alpha)^2}{r^2}\frac{\cos\omega'}{E'} + \frac{\cos\omega}{E}\right)\Phi d\sigma ,$$

wo ω und ω' diejenigen Winkel vorstellen, unter denen E und E' gegen pp' respective gegen $p'p$ geneigt sind. Und diese letzte Formel (16.) ist offenbar auch so darstellbar:

$$(17.)\quad \Phi_p + \frac{(-1)}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\Phi\frac{\cos\omega}{E}d\sigma + \frac{(A+\alpha)^2}{r^2}\frac{1}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\Phi\frac{\cos\omega'}{E'}d\sigma =$$

$$= \int_{QBQ_1}\Omega f ds + \frac{1}{2\pi r}\int_{Q_1qQ}\Phi d\sigma .$$

Erläuterung zu Formel (16.). — Ist F die vom Centrum C nach $d\sigma$ gelegte Linie, und φ der Winkel von F gegen Cpp', so gelten für die Abstände E, E' des Elementes $d\sigma$ von den Punkten p, p' die Gleichungen:

$$E^2 = r^2 + F^2 - 2rF\cos\varphi ,$$
$$E'^2 = r'^2 + F^2 - 2r'F\cos\varphi ,$$

wo $r = (Cp)$ und $r' = (Cp')$ ist. Vgl. die folgende Figur.

Hieraus folgt sofort:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \dfrac{dE}{dr} = \dfrac{r - F\cos\varphi}{E} = -\cos\omega , \\ \dfrac{dE'}{dr} = \dfrac{r' - F\cos\varphi}{E'}\dfrac{dr'}{dr} = \dfrac{dr'}{dr}\cos\omega' , \end{cases}$$

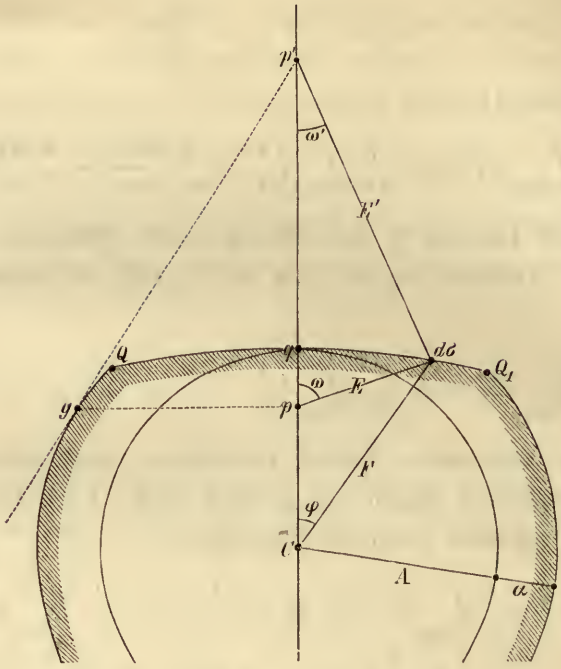
wo ω und ω' diejenigen Winkel vorstellen, unter denen E und E' gegen pp', respective gegen $p'p$ geneigt sind.

Nun findet aber, weil p und p' mit Bezug auf die Peripherie $(A+\alpha)$ zu einander conjugirt sind, die Relation statt:

$$rr' = (A+\alpha)^2 ,$$

woraus folgt:

$$\frac{dr'}{dr} = -\frac{(A+\alpha)^2}{r^2} .$$



Somit ergiebt sich aus (α.):

$$(\beta.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dE}{dr} = -\cos\omega\ , \\ \dfrac{dE'}{dr} = -\dfrac{(A+\alpha)^2}{r^2}\cos\omega' \ . \end{cases} \qquad Q.\ e.\ d.$$

NB. Um die gegenseitige Beziehung zwischen p und p' deutlich vor Augen zu haben, ist in vorstehender Figur in p ein Perpendikel pg auf der Linie Cp errichtet, und in dem so erhaltenen Punkte g eine Tangente an die Peripherie $(A+\alpha)$ gelegt. Der Schnittpunkt dieser Tangente mit der verlängerten Linie Cp ist alsdann der zu p conjugirte Punkt p'.

Durch Verkleinerung der Constante α^* kann man offenbar den der Bedingung (5.):

$$(18.)\qquad A < A + \alpha \leqq A + \alpha^*$$

unterworfenen Kreisradius $(A+\alpha)$ beliebig nahe an A herandrängen, und in solcher Weise dafür sorgen, dass das Curvenstück $Q_1 q Q$ beliebig klein wird. [Vgl. den letzten Theil des dritten Satzes pag. 101.] Hiervon Gebrauch machend, wollen wir zuvörderst durch Verkleinerung von α^* dafür sorgen, dass die Winkel

$$(18a.)\qquad qCQ \quad \text{und} \quad qCQ_1\ ,$$

beide $< 90^0$ sind. Sodann aber wollen wir, *nachdem zuvor irgend*

ein beliebiger Kleinheitsgrad ε gegeben ist, durch weitere Verkleinerung von α^* und durch die damit Hand in Hand gehende Verkleinerung des Curvenstückes $Q_1 q Q$ auch dafür sorgen, dass die beiden ersten Integrale der Formel (17.) folgenden Relationen sich subordiniren:

$$(19.)\qquad \begin{aligned} \operatorname{abs}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\Phi\frac{\cos\omega}{E}\,d\sigma\right) &< \frac{\Phi_q+\varepsilon}{2}\,,\\ \operatorname{abs}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\Phi\frac{\cos\omega'}{E'}\,d\sigma\right) &< \frac{\Phi_q+\varepsilon}{2}\,, \end{aligned}$$

wo Φ_q den Werth von Φ im Punkte q vorstellt. Dass solches möglich ist, ergiebt sich aus den beiden Sätzen pag. 106, falls man nur beachtet, dass die Function Φ [vgl. (5β.) pag. 115 und (6.) pag. 116] längs der gegebenen Curve stetig und $\geqq 0$ ist. Aus dem letztern Umstande ergiebt sich zugleich die Formel:

$$(19a.)\qquad \int_{Q_1qQ}\Phi\,d\sigma \geqq 0\,.$$

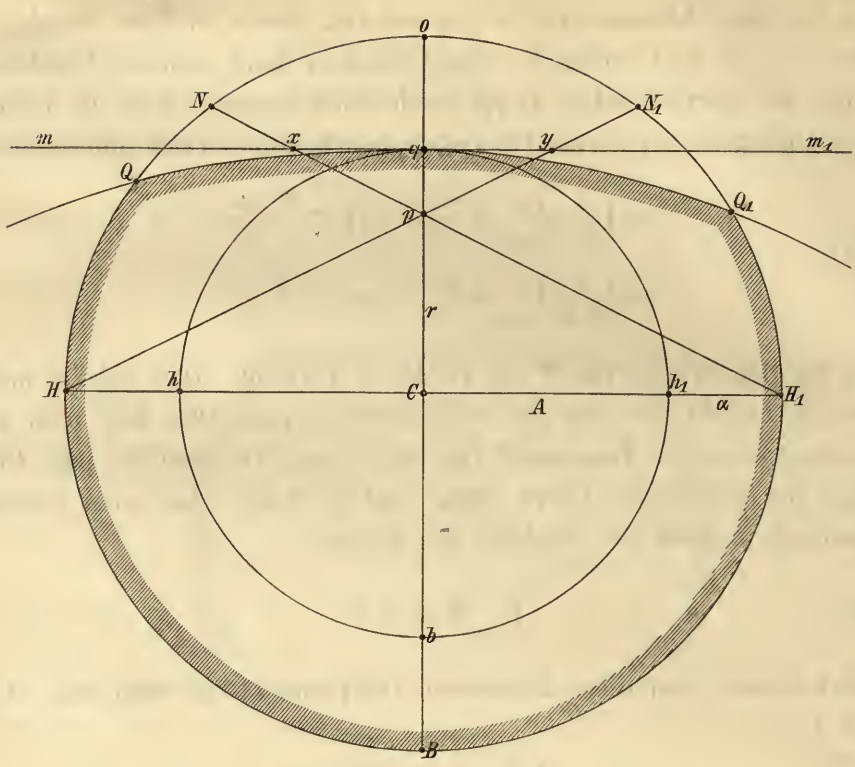
Mit Rücksicht auf diese Relationen (19.) und (19a.) folgt aus (17.) sofort:

$$(20.)\qquad \Phi_p + \left(1+\frac{(A+\alpha)^2}{r^2}\right)\frac{\Phi_q+\varepsilon}{2} > \int_{QBQ_1}\Omega f\,ds\,.$$

Hier repräsentirt f die in (13.) angegebene Function, also eine Function, die dem Hülfssatze pag. 120 sich subordinirt. Construirt man also [vgl. die folgende Figur] im Hülfskreise $(A+\alpha)$ den zu Cp senkrechten Durchmesser HCH_1, zieht man sodann die beiden Linien H_1p und Hp, und bezeichnet man diejenigen beiden Punkte, in denen die Verlängerungen dieser beiden Linien jenen Hülfskreis schneiden, mit N und N_1, so wird f

$$(21.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs des Bogens } NBN_1 \text{ überall } \textit{positiv}, \text{ und insbesondere längs des Halbkreises } HBH_1 \text{ überall}\\ &\geqq \frac{r}{16\pi(A+\alpha)^3} \text{ sein.} \end{aligned}$$

Mittelst der Formel (20.) wird es nun leicht sein, unser eigentliches Ziel zu erreichen, nämlich Aufschluss zu gewinnen über den im Randpunkte q vorhandenen Werth Φ_q. Zu diesem Zwecke müssen wir den Punkt p näher und näher an den Punkt q heranschieben, also die Centraldistanz r des Punktes p gegen A hin sich *vergrössern* lassen;



wobei es uns frei steht, die auxiliare Constante α gegen 0 hin sich *verkleinern* zu lassen. Um diese beiden Operationen, die Vergrösserung von r und die Verkleinerung von α, in eine einzige Operation zu verschmelzen, construiren wir in q die Tangente mqm_1 der Randcurve, tragen auf dieser Tangente von q aus zwei Strecken ab: (qx) und (qy), beide $= (qo)$, d. i. $= \alpha$, construiren hierauf die durch x und y gehenden Linien H_1xN und HyN_1, und nehmen endlich zum Punkte p denjenigen Punkt, in welchem diese beiden Linien einander schneiden. Hierdurch ist alsdann die augenblickliche Lage des Punktes p in bestimmte Abhängigkeit versetzt zum augenblicklichen Werthe der Constante α. Und diese Abhängigkeit ist der Art, dass eine Abnahme von α gegen 0 hin, *eo ipso* eine Zunahme der Centraldistanz r des Punktes p gegen A hin hervorbringt. Auch kann man diese Aneinanderkettung von r und α leicht durch eine Formel ausdrücken. Zufolge der angegebenen Construction sind nämlich die beiden rechtwinkligen Dreiecke pCH und pqx einander ähnlich. Folglich ist:

$$\frac{(pC)}{(CH)} = \frac{(pq)}{(qx)}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{r}{A+\alpha} = \frac{A-r}{\alpha},$$

d. i.
$$\alpha r = (A+\alpha)(A-r),$$

oder, falls man nach r auflöst:

(22.)
$$r = \frac{A(A+\alpha)}{A+2\alpha}.$$

Durch diese Formel tritt nicht nur die stricte Abhängigkeit zwischen r und α, sondern gleichzeitig auch der Umstand klar zu Tage, dass r gegen A convergirt, sobald man α gegen 0 hin abnehmen lässt.

Bevor wir weitergehen, ist noch eine Bemerkung beizufügen in Betreff der von uns construirten Punkte N und N_1. Die gegebene Randcurve des Gebietes $\mathfrak{J}$ ist [zufolge der Voraussetzung $\theta' \geqq 0$] von solcher Beschaffenheit, dass, wenn an die Curve eine beliebige Tangente gelegt wird, sämmtliche Punkte der Curve auf *derselben* Seite der Tangente liegen. [Vgl. die Note pag. 113.] Betrachtet man also in der letzten Figur die Tangente mqm_1 als horizontal, und den Durchmesser Bo als vertical *nach Oben* gerichtet, so werden sämmtliche Punkte der gegebenen Randcurve, also z. B. auch Q und Q_1 *unterhalb* der Tangente mqm_1 liegen; während jene von uns construirten Punkte N und N_1 stets *oberhalb* dieser Tangente sich befinden. Folglich wird der Kreisbogen QBQ_1 stets ein *Theil* sein vom Kreisbogen NBN_1. Zufolge (21.) wird daher die Function f

(23.) längs des Kreisbogens QBQ_1 überall *positiv*, und insbesondere längs des Halbkreises HBH_1 durchweg $\geqq \frac{r}{16\pi(A+\alpha)^3}$ sein. Dass dieser Halbkreis HBH_1 stets ein *Theil* jenes Bogens QBQ_1 ist, unterliegt keinem Zweifel, [vgl. (18 *a*.)].

Beachtet man dies, und beachtet man ausserdem, dass die Function Ω im Gebiete $\mathfrak{J}$ durchweg *positiv* ist [vgl. das auf pag. 114 über Ω Gesagte], so ergiebt sich sofort, dass das in (20.) auftretende Integral

$$\int_{QBQ_1} \Omega f ds$$

eine Summe von lauter *positiven* Gliedern ist, dass mithin dieses Integral, durch Fortlassung eines Theils seiner Glieder, stets eine Verkleinerung erleiden wird, und dass daher z. B. die Formel stattfindet:

$$\int_{QBQ_1} \Omega f ds \geqq \int_{HBH_1} \Omega f ds .$$

Diese Formel aber gewinnt, mit Rücksicht auf das in (23.) über den Halbkreis HBH_1 Gesagte, folgende Gestalt:

$$(24.) \qquad \int_{QBQ_1} \Omega f ds \geqq \frac{r\Omega_0}{16\pi(A+\alpha)^3} \int_{HBH_1} ds = \frac{r\Omega_0 \pi(A+\alpha)}{16\pi(A+\alpha)^3} ,$$

wo Ω_0 *den kleinsten Werth von* Ω *längs des Halbkreises* HBH_1 repräsentirt.

Auf Grund dieser Relation (24.) können wir jetzt unsere Formel (20.) auch so schreiben:

$$(25.) \qquad \Phi_p + \left(1 + \frac{(A+\alpha)^2}{r^2}\right) \frac{\Phi_q + \varepsilon}{2} > \frac{r\Omega_0}{16(A+\alpha)^2} ,$$

oder, indem wir für r seinen Werth (22.) substituiren, auch so:

$$(26.) \quad \Phi_p + \left(1 + \frac{(A+2\alpha)^2}{A^2}\right) \frac{\Phi_q + \varepsilon}{2} - \frac{A\Omega_0}{16(A+\alpha)(A+2\alpha)} > 0 .$$

In dieser Formel sind Φ_q, A und ε *Constanten*. Und zwar repräsentirt ε irgend welchen Kleinheitsgrad, der in unsere Untersuchung bei (19.) hineintrat, der damals beliebig gegeben war, und den wir einstweilen ungeändert beibehalten, d. h. als eine *gegebene Constante* betrachten.

Andererseits sind in der vorstehenden Formel die *Variablen* α, Ω_0 und Φ_p enthalten. Und zwar repräsentirt α eine *independente Variable*, die wir gegen 0 hin beliebig abnehmen lassen dürfen; während Ω_0 und Φ_p *stetige Functionen* von α sind, und zwar Functionen, deren Stetigkeit bei abnehmendem α ausdauert bis *inclusive* $\alpha = 0$. Es repräsentirt nämlich Ω_0 den Minimalwerth von Ω längs des Halbkreises HBH_1. Und es wird daher dieses Ω_0, weil Ω (als Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{R}_\alpha$) in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{R}_\alpha$ stetig ist, nothwendiger Weise *stetig* sich ändern, sobald man jenen Halbkreis durch Verkleinerung seines Radius, d. i. durch Abnehmen von α mehr und mehr zusammenschrumpfen lässt; wie solches aus dem Satze pag. 113 sofort sich ergiebt. Was andererseits Φ_p betrifft, so ist Φ_p [vgl. (5a.) pag. 115] eine *stetige* Function von r, und r [vgl. (22.)] eine *stetige* Function von α, folglich auch Φ_p geradezu eine *stetige* Function von α.

Alles zusammengefasst, ergiebt sich also, dass die Formel (26.) die Gestalt hat:

$$(\lambda.) \qquad F(\alpha) > 0,$$

wo $F(\alpha)$ eine Function von α vorstellt, die bei abnehmendem α *stetig* bleibt *bis inclusive* $\alpha = 0$. Da nun diese Formel ($\lambda.$) gültig ist, wie klein man α auch nehmen mag, so folgt hieraus sofort, dass

$$(\mu.) \qquad F(0) \geqq 0$$

ist. Denn wollte man annehmen, $F(0)$ sei < 0, so müssten, in Anbetracht der Stetigkeit von $F(\alpha)$, in unmittelbarer Nähe von $\alpha = 0$ positive Werthe des Argumentes α angebbar sein, für welche $F(\alpha)$ ebenfalls < 0 wäre; was mit dem Umstande in Widerspruch steht, dass die Formel ($\lambda.$) Gültigkeit besitzt für jedwedes auch noch so kleine α.

Die in solcher Weise constatirte Formel ($\mu.$) gewinnt nun, falls man für $F(\alpha)$, resp. $F(0)$ seine eigentliche aus (26.) ersichtliche Bedeutung substituirt, folgende Gestalt:

$$(27.) \qquad \Phi_q + (\Phi_q + \varepsilon) - \frac{\Omega_0}{16A} \geqq 0 \; ;$$

denn für $\alpha = 0$ wird $r = A$, mithin $\Phi_p = \Phi_q$. Dabei ist zu beachten, dass das hier in (27.) stehende Ω_0 nicht mehr den Minimalwerth für den Halbkreis HBH_1, sondern vielmehr den Minimalwerth für denjenigen kleineren Halbkreis hbh_1 vorstellt, in welchen jener durch das Herabsinken von α zu 0 übergeht [vgl. die letzte Figur]. Da nun diese für die Constanten A, Φ_q, Ω_0 erhaltene Formel (27.):

$$(28.) \qquad \Phi_q + \frac{\varepsilon}{2} \geqq \frac{\Omega_0}{32A} \; .$$

Gültigkeit besitzt, völlig unabhängig von dem zu Anfang gewählten Kleinheitsgrade ε, so folgt hieraus, dass auch

$$(29.) \qquad \Phi_q \text{ selber} \geqq \frac{\Omega_0}{32A}$$

ist. Verwandeln wir hier die Zahl 32 in 33, so werden wir statt $\geqq$ schlechtweg $>$ zu schreiben haben; sodass wir also die Formel erhalten:

$$(30.) \qquad \Phi_q > \frac{\Omega_0}{33A} \; .$$

Durch diese für jedweden Randpunkt q geltende Formel ist nun endlich die auf pag. 116 erhobene Frage beantwortet, *nämlich dargethan, dass in der dortigen Formel* (6.) *in der That das Zeichen* $\geqq$ *durch* $>$ *ersetzt werden darf.*

§ 21.

Zusammenstellung und Vervollständigung der über die Green'sche Function erhaltenen Resultate.

Die Resultate der drei letzten Paragraphe lassen sich zusammenfassen in folgenden drei Sätzen, denen ein leicht zu beweisender vierter Satz noch hinzugefügt werden soll.

Erster Satz. — *Die das Gebiet* $\mathfrak{S}$ *begrenzende geschlossene Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass*

(1.) *θ, θ', θ'' stetige Functionen der Bogenlänge sind, und dass überdies θ' überall* $\geqq 0$ *ist.*

Ferner sei innerhalb $\mathfrak{S}$ *ein fester Punkt c gegeben. Alsdann werden stets drei Fundamentalfunctionen* U, U_1, U_2 *des Gebietes* $\mathfrak{S}$ *existiren von solcher Beschaffenheit, dass erstens für jedweden Randpunkt* $U = \log \frac{1}{r}$ *ist, wo r den Abstand des Randpunktes vom festen Punkte c vorstellt, und dass zweitens für jedweden Punkt* (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{S}$ *die Relationen stattfinden:*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 . \tag{2.}$$ (!)

Die Function U heisst die dem Punkte c entsprechende Green'sche Function, und c der Centralpunkt dieser Function. [Vgl. pag. 113.]

Zweiter Satz. — *Setzt man*

$$\Omega = \left(\log \frac{1}{r}\right) - U = -(U + \log r) , \tag{3.}$$

und versteht man dabei unter U den Werth von U in einem beliebigen Punkte (x, y), *ferner unter r den Abstand dieses Punktes* (x, y) *vom festen Punkte c, so wird* Ω *eine Function von* (x, y) *sein, welche am Rande von* $\mathfrak{S}$ *überall verschwindet, welche ferner in jedwedem Punkte innerhalb* $\mathfrak{S}$ *grösser als* 0, *und speciell im Punkte c positiv unendlich ist.* [Vgl. pag. 114.]

Es sei nun ferner $\mathfrak{R}$ *das zwischen dem Rande und einer innern Parallelcurve liegende ringförmige Gebiet. Alsdann wird der Differentialquotient*

$$\frac{d\Omega}{d\nu} , \tag{4.}$$

falls man $\mathfrak{R}$ *hinreichend schmal sich vorstellt, in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{R}$ *stetig sein.* [Vgl. (57.) pag. 115.]

Dritter Satz. — *Insbesondere ist hervorzuheben, dass in jedwedem Randpunkte des Gebietes* $\mathfrak{F}$ *die Formel stattfindet:*

$$\frac{d\Omega}{d\nu} > k \,, \tag{5.}$$

wo k *eine positive und von* 0 *verschiedene Constante vorstellt. Dabei ist unter* ν *die innere Normale des Randes zu verstehen.*

Um diese Constante k *wirklich angeben zu können, bezeichne man den kleinsten Krümmungsradius der gegebenen Randcurve mit* R_0, *ferner den kürzesten Abstand des Punktes* c *von dieser Curve mit* $2P_0$, *und verstehe sodann unter* A *irgend eine bestimmte positive und von* 0 *verschiedene Constante, die* $< R_0$, *und zugleich auch* $< P_0$ *ist. Sodann lasse man auf der innern Seite der Randcurve einen Kreis vom Radius* A *fortrollen, und denke sich diesen Kreis in jedem Augenblicke der genannten Bewegung in zwei Halbkreise zerlegt mittelst eines Durchmessers, der senkrecht steht zu dem nach dem augenblicklichen Berührungspunkte hinlaufenden Radius. Der dem Berührungspunkte abgewendete Halbkreis wird alsdann während jener rollenden Bewegung eine gewisse ringförmige Fläche überstreichen, die vom Rande des Gebietes* $\mathfrak{F}$ *überall durch einen gewissen Zwischenraum getrennt ist.* [Vgl. den zweiten Satz pag. 101.] *Bezeichnet nun* Ω_0 *den kleinsten Werth der Function* Ω *in Erstreckung dieser ringförmigen Fläche, so hat jene Constante* k *den Werth:*

$$k = \frac{\Omega_0}{33A} \cdot \text{[Vgl. (30.) pag. 139.]} \tag{6.}$$

Vierter Satz. — *Man markire innerhalb* $\mathfrak{F}$ *einen festen Punkt* (x_0, y_0), *und definire* V *durch folgendes Integral:*

$$V = \int_{x_0 y_0}^{xy} (U_1 dy - U_2 dx) \,, \tag{7.}$$

die Integrationscurve in ihrer Bewegung auf das Gebiet $\mathfrak{F}$ *beschränkt gedacht. Sodann setze man:*

$$z = x + iy \,, \quad c = a + ib \,, \quad \text{und} \quad W = U + iV \,, \quad (i = \sqrt{-1}) \,, \tag{8.}$$

wo a, b *die rechtwinkligen Coordinaten des festen Centralpunktes* c *vorstellen sollen. Endlich setze man:*

$$w = (z - c)\, e^{W} . \tag{9.}$$

Alsdann werden w und W Functionen von z sein, die folgende drei Eigenschaften besitzen:

Alpha. — *Die Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ und $\frac{dW}{dz}$ existiren in jedwedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{F}$, einerlei ob derselbe innerhalb $\mathfrak{F}$ oder am Rande von $\mathfrak{F}$ liegt. Auch ist die Entstehungsweise des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$, ebenso wie die von $\frac{dW}{dz}$, in jedwedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{F}$ eine von allen Seiten her äquiconvergente. Ueberdies sind w und $\frac{dw}{dz}$, ebenso wie W und $\frac{dW}{dz}$ Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{F}$.*

Beta. — *Der Modul der Function w ist in jedem Randpunkte $= 1$, hingegen in jedem Punkte, der innerhalb $\mathfrak{F}$ liegt, < 1.*

Gamma. — *Der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ ist längs des Randes überall verschieden von 0.*

Der Beweis für Alpha ergiebt sich, so weit W und $\frac{dW}{dz}$ in Betracht kommen, unmittelbar aus den früheren Sätzen pag. 94 — 96. Sodann aber ergiebt sich der Beweis für w und $\frac{dw}{dz}$ sofort auf Grund des durch (9.) zwischen w und W festgesetzten Zusammenhanges.

Beweis für Beta. — Setzt man

$$z - c = re^{i\varphi} , \tag{A.}$$

so ist nach (9.) und (8.):

$$w = re^{i\varphi} e^{U+iV} , \tag{B.}$$

also mit Rücksicht auf (3.):

$$\mathrm{mod}\, w = re^{U} = e^{-\Omega} . \tag{C.}$$

Diese Formel aber ergiebt, unter Anwendung des zweiten Satzes, sofort die Richtigkeit der Behauptung *Beta*.

Beweis für Gamma. — Aus (9.) folgt: $\log w = W + \log (z - c)$, mithin:

$$\frac{dw}{dz} = w \frac{d[W + \log (z - c)]}{dz} . \tag{D.}$$

Und zwar wird diese Formel (*D.*), zufolge des schon bewiesenen Satzes Alpha, nicht nur auf jeden Punkt innerhalb $\mathfrak{J}$, sondern auch auf jeden *Randpunkt* anwendbar sein. Denkt man sich aber in irgend einem Randpunkte z die innere Normale ν construirt, so ist:

$$(p.) \qquad \frac{d[W + \log(z - c)]}{d\nu} = \frac{d[W + \log(z - c)]}{dz} \frac{dz}{d\nu},$$

und $\frac{dz}{d\nu} = \frac{dx}{d\nu} + i\frac{dy}{d\nu} = \cos\delta + i\sin\delta = e^{i\delta}$, wo δ das Azimuth der Normale ν gegen die x-Axe vorstellt; sodass also die Formel (*p.*) die Gestalt erhält:

$$(q.) \qquad \frac{d[W + \log(z - c)]}{dz} = \frac{d[W + \log(z - c)]}{d\nu} e^{-i\delta}.$$

Substituirt man jetzt diesen Werth (*q.*) in (*D.*), so ergiebt sich:

$$(E.) \qquad \frac{dw}{dz} = we^{-i\delta} \frac{d[W + \log(z - c)]}{d\nu},$$

oder, weil $W = U + iV$, und, nach (*A.*), $\log(z - c) = (\log r) + iq$ ist:

$$(F.) \qquad \frac{dw}{dz} = we^{-i\delta} \left(\frac{d(U + \log r)}{d\nu} + i\frac{d(V + \varphi)}{d\nu} \right),$$

also mit Rücksicht auf (3.):

$$(G.) \qquad \frac{dw}{dz} = we^{-i\delta} \left(-\frac{d\Omega}{d\nu} + i\frac{d(V + \varphi)}{d\nu} \right).$$

Diese Formel (*G.*) ist bezogen zu denken auf einen beliebigen *Randpunkt* z. Von den drei Factoren, welche die rechte Seite der Formel bilden, kann der *erste* niemals verschwinden, wie sich solches direct aus (9.) ergiebt, falls man nur beachtet, dass W, zufolge des schon constatirten Satzes Alpha, eine Fundamentalfunction von $\mathfrak{J}$, mithin in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ *endlich* ist*). Der *zweite* Factor kann ebenfalls nicht verschwinden, weil δ (seiner Definition nach) *reell* ist. Und der *dritte* Factor kann ebenfalls nicht verschwinden, weil $\frac{d\Omega}{d\nu}$, zufolge des dritten Satzes, stets > 0 ist. Somit ergiebt sich aus (*G.*), dass $\frac{dw}{dz}$ am Rande des Gebietes $\mathfrak{J}$ *nirgends* $= 0$ ist. — *Q. e. d.*

*) Ueberdies ist zu beachten, dass der Punkt c *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt, vom Rande also durch irgend welchen Zwischenraum getrennt ist.

§ 22.

Zur Theorie der conformen Abbildung.

Sind die Punkte der w-Ebene und die der z-Ebene einander zugeordnet mittelst der Gleichung

$$(\alpha.) \qquad w = F(z) \ ,$$

so wird zwischen dem System der w-Punkte und dem System der z-Punkte *vollkommene Aehnlichkeit* stattfinden, sobald für je zwei beliebige Punkte z und z' die Bedingung erfüllt ist:

$$(\beta.) \qquad \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} = K \ ,$$

wo K eine *von Null verschiedene*, reelle oder complexe Constante vorstellen soll. Diese Bedingung aber wird, wie man sofort erkennt, nur dann erfüllt sein, wenn $F(z) = Kz +$ Const. ist, also nur dann, wenn $F(z)$ eine *lineare* Function von z ist.

Der soeben ausgesprochene Satz ($\alpha.$), ($\beta.$) scheint einer gewissen Verallgemeinerung fähig zu sein. Denn es wird offenbar *vollkommene* Aehnlichkeit auch dann noch stattfinden, wenn man in ($\beta.$) die nicht verschwindende Constante K durch irgend eine nicht verschwindende Function $\Phi(z)$ ersetzt, also verlangt, dass jedweder Punkt z in Verbindung mit all' seinen Nachbarpunkten z' der Formel entsprechen soll:

$$\frac{F(z') - F(z)}{z' - z} = \Phi(z) \ .$$

Indessen wird diese Formel, weil, wenn z' Nachbarpunkt von z ist, auch umgekehrt z einen Nachbarpunkt von z' repräsentirt, die weitere Formel nach sich ziehen:

$$\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} = \Phi(z') \ .$$

Und aus beiden Formeln zusammengenommen folgt sofort: $\Phi(z) = \Phi(z')$, d. i.: $\Phi(z) =$ Const.; sodass man also auf diese Weise zur früheren Bedingung ($\beta.$) zurückgeführt wird.

Vollkommene Aehnlichkeit wird daher nur dadurch zu erreichen sein, dass wir an der Bedingung ($\beta.$) festhalten, oder (was auf dasselbe hinauskommt) nur dadurch zu erreichen sein, dass wir $F(z)$ als eine lineare Function von z uns denken.

Hingegen werden wir über jene Bedingung ($\beta.$) hinausgreifen, nämlich statt derselben diejenige allgemeinere Bedingung nehmen dürfen, in welcher die nichtverschwindende Constante K durch eine nichtverschwindende Function $\Phi(z)$ ersetzt ist, — sobald wir mit einer nur *unvollkommenen* oder *approximativen* Aehnlichkeit oder (wie man zu sagen pflegt) mit einer Aehnlichkeit *in den kleinsten Theilen* uns begnügen wollen. In der That wird zu diesem Zweck nur erforderlich sein, dass der Quotient

$$\frac{F(z') - F(z)}{z' - z}$$

für jeden Punkt z und all' seine Nachbarpunkte z' einen von diesen Nachbarpunkten z' *nahezu* unabhängigen Werth besitzt, und dass ausserdem dieser Werth ein *nichtverschwindender* sei. Mit andern Worten: Es wird zu dem genannten Zweck nur erforderlich sein, dass dieser Quotient für jeden Punkt z und all' seine Nachbarpunkte z' *nahezu* $= \Phi(z)$ sei, wo $\Phi(z)$ irgend eine beliebige, *von* z' *unabhängige* und *nichtverschwindende* Function von z vorstellt.

Oder genauer ausgedrückt: Die durch die Formel

$$(\gamma.) \qquad w = F(z)$$

bewirkte Abbildung wird eine *in den kleinsten Theilen ähnliche* zu nennen sein, sobald — unter ε ein beliebig gegebener Kleinheitsgrad verstanden — um jedweden Punkt z (als Centrum) ein Kreis von solcher Kleinheit construirbar ist, dass für alle innerhalb dieses Kreises befindlichen Punkte z' die Formel stattfindet:

$$(\delta.) \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - \Phi(z)\right) < \varepsilon \ ,$$

wo $\Phi(z)$ eine beliebig gegebene, *von* z' *unabhängige* und *nichtverschwindende* Function von z vorstellen soll.

Nachträglich erkennen wir nun, dass diese neue Function $\Phi(z)$ zur ursprünglichen Function $F(z)$ in einfacher Beziehung steht. In der That ergiebt sich aus der Bedingung ($\delta.$), dass $\Phi(z)$ der *Differentialquotient* von $F(z)$ sein muss. Oder genauer ausgedrückt: Soll jene der Function $F(z)$ auferlegte Bedingung ($\delta.$) erfüllbar sein, so ist dazu erstens erforderlich, dass die Function $F(z)$ *einen Differentialquotienten besitzt*, und zweitens erforderlich, dass die Entstehungsweise dieses Differentialquotienten für jedweden Punkt z eine *von*

allen Seiten her äquiconvergente ist. Zugleich wird alsdann jene neue Function $\Phi(z)$ nichts Anderes sein, als der Werth dieses Differentialquotienten. Demgemäss können wir die von uns angestellten Betrachtungen ($\gamma.$), ($\delta.$) schliesslich folgendermassen formuliren:

Definition. — *Die durch die Formel*

$$(\varepsilon.) \qquad w = F(z)$$

bewirkte Abbildung wird eine in den kleinsten Theilen ähnliche zu nennen sein, sobald die Function $F(z)$ einen Differentialquotienten besitzt, dessen Entstehungsweise für jedweden Punkt z eine von allen Seiten her äquiconvergente ist, und dessen Werth nirgends $= 0$ ist.

Dabei kann noch hinzugefügt werden, dass die durch jene Formel ($\varepsilon.$) bewirkte Abbildung eine eindeutige zu nennen ist, sobald die Function $F(z)$ eindeutig ist, mithin jedem Punkte z immer nur ein Punkt w zugehört.

Ist in der z-Ebene irgend ein *bestimmtes Gebiet* gegeben, und soll die Eindeutigkeit der Abbildung und ihre Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen nicht schlechtweg, sondern *nur in Erstreckung dieses Gebietes* stattfinden, so werden selbstverständlich auch die soeben ausgesprochenen Anforderungen nur insoweit zu erfüllen sein, als sie dieses specielle Gebiet betreffen.

Ich werde nun zeigen, dass durch die im vorhergehenden Paragraph [in (9.) pag. 142] *angegebene Function*

$$(1.) \qquad w = (z - c)e^{W} = F(z)$$

eine eindeutige und in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung des in der z-Ebene gegebenen Gebietes $\mathfrak{Z}$ auf einer in der w-Ebene um den Punkt $w = 0$ mit dem Radius 1 beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{K}$ bewirkt wird. Um dieses nachzuweisen werde ich, in Anbetracht der soeben gegebenen Definition, Zweierlei zu zeigen haben, nämlich

A., *dass die Formel (1.) für jedweden Punkt z des Gebietes $\mathfrak{Z}$ einen, und stets nur einen Punkt w der Kreisfläche $\mathfrak{K}$ liefert, und dass dabei für jeden Punkt z innerhalb $\mathfrak{Z}$ ein Punkt w innerhalb $\mathfrak{K}$, andererseits aber für jedweden Punkt z am Rande von $\mathfrak{Z}$ ein Punkt w am Rande von $\mathfrak{K}$ sich ergiebt*;

B., *dass in jedwedem Punkte z des Gebietes $\mathfrak{Z}$, mag nun derselbe innerhalb $\mathfrak{Z}$ oder am Rande von $\mathfrak{Z}$ gelegen sein, ein Differentialquotient*

$\frac{dw}{dz}$ *existirt, dass ferner die Entstehungsweise dieses Differentialquotienten für jeden solchen Punkt* z *eine von allen Seiten her äquiconvergente ist, und dass endlich der Werth dieses Differentialquotienten in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{Z}$ *verschieden von* 0 *ist.*

Beweis für A. — Die Formel (1.) liefert, weil w [Satz Alpha pag. 142] eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{Z}$, also in Erstreckung von $\mathfrak{Z}$ eindeutig ist, für jedweden Punkt z des Gebietes $\mathfrak{Z}$ einen, und nur *einen* Werth w. Und zwar wird dieser Werth w [nach Beta, pag. 142], jenachdem z *innerhalb* $\mathfrak{Z}$ oder *am Rande* von $\mathfrak{Z}$ liegt, der Formel mod $w < 1$ oder der Formel mod $w = 1$ entsprechen, also einen Punkt w repräsentiren, der im ersteren Fall *innerhalb* $\mathfrak{K}$, im letzteren *am Rande* von $\mathfrak{K}$ liegt. — *Q. e. d.*

Beweis für B. — Dass der Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ in jedwedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{Z}$ *existirt*, und dass seine Entstehungsweise in jedem solchen Punkte eine von allen Seiten her *äquiconvergente* ist, ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Satze Alpha pag. 142. Es bleibt also nur noch nachzuweisen übrig, dass sein Werth in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{Z}$ *nirgends verschwindet.*

Bezeichnet man den Ausdruck auf der rechten Seite der Formel (1.) mit $F(z)$, die Formel selber also mit $w = F(z)$, so wird [nach Beta, pag. 142] mod $F(z) = 1$ bleiben, sobald man z den *Rand* von $\mathfrak{Z}$ durchlaufen lässt. Ist also w_1 irgend ein vorläufig fester Punkt *innerhalb* $\mathfrak{K}$, mithin mod $w_1 < 1$, so wird in dem über jenen Rand von $\mathfrak{Z}$ erstrecktem Integral

$$(2.) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{Z}} \frac{F'(z)dz}{F(z) - w_1}$$

der Nenner $F(z) - w_1$ niemals verschwinden können. Hieraus folgt sofort, dass der Werth dieses Integrals bei einer *innerhalb* $\mathfrak{K}$ bleibenden Bewegung des Punktes w_1 nur in *stetiger* Weise sich ändern kann, und dass derselbe also, weil er stetiger Aenderungen unfähig ist, bei jener Bewegung *constant* bleiben muss. Dass nämlich der Werth dieses Integrals stetiger Aenderungen unfähig ist, ergiebt sich aus einem bekannten *Cauchy'schen Theorem*, dem zufolge der Werth des Integrals die Anzahl der elementaren Nullpunkte der Function $F(z) - w_1$ *innerhalb* $\mathfrak{Z}$, oder (was auf dasselbe hinauskommt) die

Anzahl der elementaren Nullpunkte dieser Function *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{F}$ vorstellt*); so dass also der Werth des Integrals immer nur eine *ganze Zahl* sein kann.

Zugleich ergiebt sich aus diesem Cauchy'schen Theorem, dass man den soeben über die Constanz des Integrales (2.) ausgesprochenen Satz auch so ausdrücken kann:

So lange w_1 *innerhalb* $\mathfrak{R}$ bleibt, ist die Anzahl der in Erstreckung von $\mathfrak{F}$ vorhandenen elementaren Nullpunkte der Function $F(z) - w_1$ stets *ein und dieselbe*, mithin z. B. ebenso gross wie für $w_1 = 0$, und folglich $= 1$. Denn für $w_1 = 0$ reducirt sich die genannte Function auf $F(z)$ selber, d. i. [vgl. (1.)] auf die Function $(z - c)\,e^W$; und diese letztere besitzt in der That, weil W [als Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{F}$; vgl. Alpha pag. 142] überall *endlich* ist, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{F}$ nur *einen einzigen* elementaren Nullpunkt, nämlich nur den Nullpunkt $z = c$.

Giebt man also dem Punkte w_1 *innerhalb* $\mathfrak{R}$ *eine beliebige Bewegung, so wird hierbei die Anzahl der in Erstreckung von* $\mathfrak{F}$ *befindlichen elementaren Nullpunkte der Function*

$$F(z) - w_1 \tag{3.}$$

fortdauernd $= 1$ *bleiben.*

Wir markiren jetzt irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{F}$ einen Punkt z_1, und beschreiben um z_1 (als Centrum) eine völlig *innerhalb* $\mathfrak{F}$ liegende Kreisfläche. Alsdann sind $F(z)$ und $F'(z)$ [als Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{F}$; vgl. Alpha pag. 142] in ganzer Erstreckung dieser Kreisfläche stetig. Folglich wird $F(z)$ für alle Punkte z innerhalb dieser Kreisfläche darstellbar sein durch die Taylor'sche Reihe:

$$F(z) = F(z_1) + \frac{z - z_1}{1} F'(z_1) + \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} F''(z_1) + \cdots , \tag{4.}$$

eine Formel, die auch so geschrieben werden kann:

$$F(z) - w_1 = \frac{z - z_1}{1} F'(z_1) + \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} F''(z_1) + \cdots . \tag{5.}$$

---

*) In der That kommt es auf ein und dasselbe hinaus, ob man so oder so sich ausdrückt. Denn die Function $F(z) - w_1$ kann, wie schon betont wurde, so lange w_1 *innerhalb* $\mathfrak{R}$ gedacht wird, am *Rande* von $\mathfrak{F}$ niemals verschwinden. Und es wird daher diese Function *innerhalb* $\mathfrak{F}$ genau dieselben Nullpunkte besitzen, wie *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{F}$, — immer vorausgesetzt, dass w_1 *innerhalb* $\mathfrak{R}$ sich befindet.

Hier ist $w_1 = F(z_1)$. Es bezeichnet also w_1 den mit z_1 correspondirenden Punkt; und es wird daher, weil z_1 *innerhalb* $\mathfrak{Z}$ angenommen war, auch w_1 *innerhalb* $\mathfrak{K}$ liegen, [wie solches aus dem schon bewiesenen Satze A, pag. 146 hervorgeht].

Aus der Formel (5.) ergiebt sich nun sofort, dass $F'(z_1)$ *verschieden von* 0 ist. Denn wäre $F'(z_1) = 0$, so würde die Function $F(z) - w_1$, zufolge der Formel (5.), an der Stelle z_1 einen Nullpunkt *zweiter Ordnung*, d. i. zwei mit einander coincidirende elementare Nullpunkte besitzen; was dem Satze (3.) widerspricht.

Somit ist bewiesen, dass der Differentialquotient $F'(z)$ oder $\frac{dw}{dz}$ in einem Punkte z_1 *innerhalb* $\mathfrak{Z}$ niemals Null sein kann. Andererseits aber ist, zufolge des Satzes Gamma, pag. 142, ein Nullwerden desselben am *Rande* von $\mathfrak{Z}$ ebenfalls unmöglich. Demgemäss kann dieser Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ in *ganzer Erstreckung* des Gebietes $\mathfrak{Z}$ niemals verschwinden. — *Q. e. d.*

Anhang zum letzten Capitel.

Wenn hier eine Begründung desjenigen geometrischen Satzes gegeben werden soll, der früher *ohne Beweis* hingestellt worden ist (vergl. die Note pag. 102), so werden andererseits die folgenden Darlegungen zugleich auch ein Beispiel dafür bieten, wie schwer es zuweilen ist, Sätze, die aus der geometrischen Anschauung fast von selber sich ergeben, mit wirklicher Strenge zu constatiren.

Es sei irgend eine geschlossene Curve gegeben. Ueber die Beschaffenheit dieser Curve mögen, unter Anwendung der auf pag. 3 eingeführten Bezeichnungen: σ, θ, $\theta' = \frac{d\theta}{d\sigma}$, *folgende Voraussetzungen gemacht sein:*

(1.) *θ und θ' sollen stetige Functionen von σ sein*, (so dass also die Curve nicht nur von stetiger Biegung, sondern auch von stetiger Krümmung ist).

(2.) *θ' soll durchweg $\geqq 0$ sein*, (so dass also die Curve überall convex sein wird, jedoch in dem Sinne, dass auch geradlinige Strecken mit unterlaufen können).

(3.) *Das Azimuth 0 der Curventangente soll, sobald man ihren Berührungspunkt die ganze Curve einmal durchlaufen lässt, um* 360^0 *wachsen*, (wodurch das Vorkommen von Doppelpunkten bei der Curve ausgeschlossen sein wird).

Bezeichnet man alsdann den Krümmungsradius mit R*:*

(4.) $$R = \frac{1}{\theta'} \text{ ,}$$ [vgl. die Note pag. 113],

und den kleinsten Krümmungsradius der ganzen gegebenen Curve mit R_0*, so gelten folgende Sätze:*

Erster Satz. — *Sind* p_1 *und* p_2 *irgend zwei Curvenpunkte, deren Azimuthunterschied**) > 0 *und* $\leqq 90^0$ *ist, und schneiden die diesen Punkten zugehörigen Normalen einander im Punkte* q*, so werden die Richtungen der in* p_1 *und* p_2 *errichteten inneren Normalen von* p_1 *nach* q*, respective von* p_2 *nach* q *laufen. Ueberdies wird alsdann jedes der beiden Liniensegmente* $p_1 q$ *und* $p_2 q$*, seiner Länge nach,* $\geqq R_0$ *sein.*

Zweiter Satz. — *Denkt man sich auf der gegebenen Curve irgend zwei innere Normalen errichtet, jede* $< R_0$*, so können diese beiden Normalen keinen Punkt mit einander gemein haben.*

Dritter Satz. — *Ein irgendwo an die Curve gelegter innerer Berührungskreis, dessen Radius* $< R_0$ *ist, kann mit der Curve stets nur einen einzigen Punkt, nämlich nur den Berührungspunkt gemein haben.*

Mit andern Worten: Denkt man sich einen solchen Kreis construirt, so werden sämmtliche Punkte der Curve, mit alleiniger Ausnahme des Berührungspunktes, ausserhalb dieses Kreises liegen.

Vierter Satz. — *Werden zur gegebenen Curve zwei innere Parallelcurven construirt, so können diese beiden letzteren, falls ihre Abstände von der gegebenen Curve beide* $< R_0$ *sind, keinen Punkt mit einander gemein haben.*

Fünfter Satz. — *Eine innere Parallelcurve, deren Abstand von der gegebenen Curve* $< R_0$ *ist, kann keinen Doppelpunkt haben.*

---

*) Unter dem Azimuth irgend eines Curvenpunktes soll hier dasjenige Azimuth verstanden sein, unter welchem die in diesem Punkte an die Curve gelegte Tangente gegen die x-Axe geneigt ist. Solches festgesetzt, ist nun unter dem Azimuthunterschied der beiden Punkte p_1 und p_2 die Differenz derjenigen Azimuthe zu verstehen, welche diese beiden Punkte besitzen.

Für unsere Zwecke handelt es sich eigentlich nur allein um den *dritten Satz*, (vgl. die Note pag. 102). Die beiden ersten Sätze bilden aber das Gerüst, auf welchem wir zu diesem dritten Satze gelangen werden. Andererseits sind die beiden letzten Sätze nur beiläufig hinzugefügt.

Beweis des ersten Satzes. — Lässt man einen Curvenpunkt

$$p(\sigma,\ \theta,\ \xi,\ \eta)$$

— d. h. einen Curvenpunkt p mit der Bogenlänge σ, dem Azimuth*) θ und den rechtwinkligen Coordinaten ξ, η — längs der gegebenen Curve in *positiver* Richtung fortschreiten, so wird σ *wachsen*, und daher θ [zufolge (2.)] ebenfalls *wachsen*, respective *sich gleich bleiben*. Man bezeichne diesen in positiver Richtung fortschreitenden Punkt in irgend einem bestimmten Augenblicke mit

$$p_1(\sigma_1,\ \theta_1,\ \xi_1,\ \eta_1)\ ,$$

und in irgend einem *späteren* Augenblicke mit

$$p_2(\sigma_2,\ \theta_2,\ \xi_2,\ \eta_2)\ ;$$

so dass also $\sigma_1 < \sigma_2$ und $\theta_1 \leqq \theta_2$ ist. Diese beiden Augenblicke aber denke man sich der Art gewählt, dass

(5). $$\theta_1 < \theta_2 \quad (\text{nicht} \leqq \theta_2)\ , \quad \text{und} \quad \theta_2 - \theta_1 \leqq 90^\circ$$

ist. Trägt man nun auf den in p_1 und p_2 errichteten *inneren* Normalen ν_1 und ν_2, respective von p_1 und p_2 aus, irgend zwei Längen auf: L_1 und L_2, so ergeben sich zwischen den *Anfangspunkten* $p_1(\xi_1, \eta_1)$, $p_2(\xi_2, \eta_2)$ dieser Linien L_1, L_2 und zwischen ihren *Endpunkten* (Ξ_1, H_1), (Ξ_2, H_2) folgende Relationen:

$$\Xi_1 = \xi_1 + L_1 \cos(\theta_1 + 90^\circ)\ , \qquad \Xi_2 = \xi_2 + L_2 \cos(\theta_2 + 90^\circ)\ ,$$

$$\mathsf{H}_1 = \eta_1 + L_1 \sin(\theta_1 + 90^\circ)\ , \qquad \mathsf{H}_2 = \eta_2 + L_2 \sin(\theta_2 + 90^\circ)\ ;$$

denn $\theta_1 + 90^0$ und $\theta_2 + 90^0$ sind die Azimuthe der beiden Normalen ν_1 und ν_2 gegen die x-Axe.

Sollen jene beiden Endpunkte (Ξ_1, H_1) und (Ξ_2, H_2) unter einander identisch sein, also zusammenfallen mit dem *Schnittpunkte* der in p_1 und p_2 errichteten Normalen, so müssen die Gleichungen stattfinden: $\Xi_1 = \Xi_2$ und $\mathsf{H}_1 = \mathsf{H}_2$, d. i. die Gleichungen:

*) Vgl. die vorhergehende Note.

$$(6.)\qquad \begin{aligned} L_1 \cos(\theta_1 + 90^0) - L_2 \cos(\theta_2 + 90^0) &= \xi_2 - \xi_1 \,, \\ L_1 \sin(\theta_1 + 90^0) - L_2 \sin(\theta_2 + 90^0) &= \eta_2 - \eta_1 \,. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit unseres ersten Satzes wird nun offenbar dargethan sein, sobald es uns gelingt zu zeigen, dass die aus diesen Gleichungen (6.) *für* L_1 *und* L_2 *sich ergebenden Werthe beide* $positiv$, *und beide* $\geqq R_0$ *sind.*

Aus den bekannten Formeln $\frac{d\xi}{d\sigma} = \cos\theta$ und $\frac{d\eta}{d\sigma} = \sin\theta$ [vgl. (*C.*) pag. 3] ergiebt sich zuvörderst:

$$\xi_2 - \xi_1 = \int_{p_1}^{p_2} \cos\theta \cdot d\sigma \,,$$

$$\eta_2 - \eta_1 = \int_{p_1}^{p_2} \sin\theta \cdot d\sigma \,,$$

die Integrationen längs der gegebenen Curve in positiver Richtung von p_1 nach p_2 hinerstreckt gedacht. Demgemäss gehen die Gleichungen (6.) über in:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} -L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_2 &= \int_{p_1}^{p_2} \cos\theta \cdot d\sigma \,, \\ +L_1 \cos\theta_1 - L_2 \cos\theta_2 &= \int_{p_1}^{p_2} \sin\theta \cdot d\sigma \,. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese beiden Formeln einmal mit $\cos\theta_2$, $\sin\theta_2$, das andere Mal mit $\cos\theta_1$, $\sin\theta_1$, und addirt man jedesmal, so erhält man:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) &= \int_{p_1}^{p_2} \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\sigma \,, \\ L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) &= \int_{p_1}^{p_2} \cos(\theta - \theta_1) \cdot d\sigma \,. \end{aligned}$$

Hier repräsentirt das θ (ohne Index) das Azimuth eines in positiver Richtung von p_1 nach p_2 laufenden Curvenpunktes. Demgemäss wird die Differenz $\theta - \theta_1$, wie sich aus (2.) und (5.) sofort ergiebt, stets $\geqq 0$, und stets $\leqq 90^0$ sein. Folglich wird $\cos(\theta - \theta_1)$ stets *positiv* sein. In solcher und ähnlicher Weise gelangt man zu der Einsicht, dass die in (8.) auftretenden Grössen

$$(9.)\qquad \cos(\theta_2 - \theta) \,, \quad \cos(\theta - \theta_1) \quad \text{und} \quad \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

durchweg *positiv* sind. Demgemäss ergiebt sich aus jenen Formeln (8.) sofort, dass

(10.) $$L_1 \quad \text{und} \quad L_2$$

ebenfalls stets *positiv* sind.

Um nun ferner zu zeigen, dass L_1 und L_2 stets $\geqq R_0$ sind, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden.

Erster Fall: θ' ist längs der betrachteten Curvenstrecke $p_1 p_2$ durchweg > 0. Alsdann ist jedes Bogenelement $d\sigma$ dieser Curvenstrecke durch die Formel ausdrückbar:

$(\alpha.)$ $$d\sigma = \frac{d\theta}{\theta'} = R\,d\theta\,, \quad [\text{vgl. } (4.)]\,;$$

sodass also die Gleichungen (8.) die Gestalt erhalten:

$(\beta.)$ $$L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta\,,$$
$$L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \cos(\theta - \theta_1) \cdot d\theta\,.$$

Diese Integrale aber, in denen die Cosinus [vgl. (9.)] durchweg *positiv* sind, werden verkleinert werden, sobald man das in ihnen enthaltene R durch seinen *kleinsten* Werth, d. i. durch R_0 ersetzt. Somit ergiebt sich z. B.:

$$L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq R_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta\,,$$

oder, falls man die Integration wirklich ausführt:

$$L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq R_0 \sin(\theta_2 - \theta_1)\,,$$

also, weil $\sin(\theta_2 - \theta_1)$, zufolge (5.), stets > 0 ist:

$(\gamma.)$ $$L_1 \geqq R_0\,.$$

Und in analoger Art wird sich auf Grund der *zweiten* Formel $(\beta.)$ ergeben:

$(\delta.)$ $$L_2 \geqq R_0\,. \quad -\quad Q.\ e.\ d.$$

Zweiter Fall: Die Curvenstrecke $p_1 p_2$ besteht aus zwei Theilen $p_1 g$ und $g p_2$, von solcher Beschaffenheit, dass θ' längs des ersten Theiles durchweg $= 0$, längs des zweiten Theiles aber, mit alleiniger Ausnahme des Punktes g, überall > 0 ist. Alsdann kann man für die Strecke $p_1 g$ von der Formel $(\alpha.)$ *keinen* Gebrauch machen, weil der in dieser Formel enthaltene Nenner θ' längs $p_1 g$ verschwindet. Wir sind somit jene im ersten Fall benutzte Methode hier bei Behandlung des zweiten Falles zu *modificiren* gezwungen.

Wir markiren zuvörderst auf der Curvenstrecke gp_2 einen auxiliaren Punkt h, beliebig nahe an g gelegen:

$$p_1 \cdots\cdots g \cdot\cdot h \cdots\cdots p_2$$

so dass also θ' längs hp_2 *ausnahmslos* > 0 ist. Sodann schreiben wir die erste der Gleichungen (8.) folgendermassen:

$$(\varepsilon.) \quad L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \int_{p_1}^{h} \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\sigma + \int_{h}^{p_2} \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\sigma \ .$$

Die rechte Seite dieser Formel wird aber, weil die Cosinus [vgl. (9.)] durchweg positiv sind, verkleinert werden, sobald man das erste Integral ganz fortlässt. Somit folgt:

$$(\xi.) \quad L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq \int_{h}^{p_2} \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\sigma \ .$$

Hier nun können wir, weil θ' längs hp_2 ausnahmslos > 0 ist, von der Substitution (α.) Gebrauch machen, und erhalten also:

$$(\eta.) \quad L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq \int_{h}^{p_2} R \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta \ .$$

Längs $p_1 g$ ist nach unserer Annahme $\theta' = 0$, mithin θ *constant*, $= \theta_1$. Demgemäss wird θ im Punkte h nur wenig grösser sein als θ_1, etwa $= \theta_1 + \beta$, wo alsdann β eine positive Grösse vorstellt, deren Werth durch ein näheres Heranschieben des Punktes h gegen g *beliebig klein* gemacht werden kann. Da nun überdies θ im Punkte p_2 den Werth θ_2 hat, so geht die Formel (η.) über in:

$$(\vartheta.) \quad L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq \int_{\theta_1+\beta}^{\theta_2} R \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta \ .$$

Die rechte Seite dieser Formel wird aber, weil der dortige Cosinus [vgl. (9.)] durchweg positiv ist, verkleinert werden, sobald wir R durch R_0 ersetzen. Thun wir dies, und führen wir sodann die Integration wirklich aus, so erhalten wir:

$$(\iota.) \quad L_1 \geqq R_0 \frac{\sin(\Delta - \beta)}{\sin \Delta} \ , \quad \text{wo} \quad \Delta = \theta_2 - \theta_1 \ ,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(\varkappa.) \quad L_1 \geqq R_0 - \gamma \ , \quad \text{wo} \quad \gamma = R_0 \frac{\sin \Delta - \sin(\Delta - \beta)}{\sin \Delta}$$

ist, und wo also γ (ebenso wie β) eine positive Grösse repräsentirt, deren Werth durch ein näheres Heranschieben von h gegen g *beliebig klein* gemacht werden kann.

Die Formel ($\varkappa$.) ist, ihrer Ableitung zufolge, stets gültig, wie nahe wir uns den Punkt h an g auch denken mögen. Demgemäss wird also

diese zwischen den beiden *festen* Werthen L_1 und R_0 stattfindende Relation (z.) stets in Kraft bleiben, bis zu welcher Kleinheit wir die positive Grösse γ auch herunterdrücken mögen. Hieraus aber folgt nach bekannter Schlussweise, dass

$$L_1 \geqq R_0 \tag{\lambda.}$$

sein muss. Und in analoger Art wird sich zeigen lassen, dass auch $L_2 \geqq R_0$ ist. — *Q. e. d.*

Alle übrigen Fälle werden, wenn auch etwas weitläufiger, so doch in ähnlicher Art behandelbar sein. Ausgenommen bleibt dabei aber ein Fall, der besondere Schwierigkeiten machen dürfte, nämlich *der*, dass θ' längs der gegebenen Curvenstrecke in *unendlich vielen discreten* Punkten zu 0 wird. — All' diesen Weitläufigkeiten und Schwierigkeiten jedoch können wir entgehen durch Anwendung folgender sehr einfachen, wenn auch etwas künstlichen Methode:

Es ist identisch:

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta)\, d\theta \ .$$

Demgemäss können wir die *erste* der Formeln (8.) auch so schreiben:

$$L_1 = \frac{\int \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\sigma}{\int \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta} \ , \tag{11.}$$

oder auch so:

$$L_1 = \frac{\int \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\sigma}{\int \cos(\theta_2 - \theta) \cdot \theta' d\sigma} \ , \tag{12.}$$

beide Integrationen hinerstreckt gedacht über die gegebene Curvenstrecke $p_1 p_2$. Die rechte Seite dieser Formel (12.) wird, weil die daselbst auftretenden Cosinus [vgl. (9.)] stets positiv sind, und θ' [vgl. (2.)] ebenfalls stets positiv ist, *verkleinert* werden, sobald wir daselbst dieses θ' durch seinen *grössten* Werth ersetzen. Somit erhalten wir:

$$L_1 \geqq \frac{1}{\mathrm{Max}(\theta')} \frac{\int \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta}{\int \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta} \ , \tag{13.}$$

d. i.

$$L_1 \geqq \frac{1}{\mathrm{Max}(\theta')} = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{\theta'}\right) = \mathrm{Min}(R) \ ,$$

also, weil der Minimalwerth von R mit R_0 bezeichnet worden ist:

(15.) $$L_1 \geqq R_0 \ .$$

In analoger Art wird sich offenbar, auf Grund der *zweiten* Formel (8.), darthun lassen, dass auch $L_2 \geqq R_0$ ist. — *Q. e. d.*

Beweis des zweiten Satzes. — Wir betrachten irgend drei auf der gegebenen Curve in positiver Richtung aufeinander folgende Punkte p_1, p_0, p_2 mit den inneren Normalen ν_1, ν_0, ν_2, und mit den Azimuthen*) $\theta_1, \theta_0, \theta_2$, indem wir zugleich setzen:

(*A.*) $$\theta_1 = \theta_0 - \alpha \quad \text{und} \quad \theta_2 = \theta_0 + \beta \ .$$

Alsdann sind α und β positive Grössen, die aber auch 0 sein können. So z. B. wird $\alpha = 0$ sein, falls die Curvenstrecke $p_1 p_0$ geradlinig ist. U. s. w.

Denken wir uns die Punkte p_1, p_0, p_2 vorläufig sehr nahe aneinander, mithin α und β sehr klein, und bezeichnen wir die beiden Punkte, in denen die Normale ν_0 von ν_1 und ν_2 geschnitten wird, mit q_1 und q_2, so ist zufolge des schon bewiesenen ersten Satzes:

(*B.*) $$(p_1 q_1) \geqq R_0 \quad \text{und} \quad (p_2 q_2) \geqq R_0 \ .$$

Dabei macht z. B. der Fall, dass die Curvenstrecke $p_1 q_1$ *geradlinig* ist, *keine* Ausnahme. Allerdings würde alsdann $\alpha = 0$, d. h. $\theta_1 = \theta_0$, mithin der soeben citirte Satz nicht mehr anwendbar sein. Es würden aber in diesem Falle die beiden Normalen ν_1 und ν_0 einander parallel sein. Mithin darf man in diesem Falle $(p_1 q_1) = +\infty$ sich vorstellen; so dass also $(p_1 q_1) > R_0$ ist. U. s. w.

Tragen wir nun auf den Normalen ν_1 und ν_2, respective von p_1 und p_2 aus, irgend zwei Längen A_1 und A_2 auf, deren jede $< R_0$ ist, *so werden diese beiden Liniensegmente A_1 und A_2 keinen Punkt mit einander gemein haben.* Denn zufolge (*B.*) liegt A_1 auf der *einen*, und A_2 auf der *andern* Seite von ν_0, und zwar der Art, dass sowohl A_1 wie auch A_2 von der Normale ν_0 durch irgend welchen Zwischenraum getrennt sein wird.

Diese einfachen, auf den ersten Satz sich stützenden Betrachtungen bleiben Schritt für Schritt in Kraft, sobald wir die Grössen α und β, die bis jetzt sehr klein gedacht wurden, mehr und mehr anwachsen lassen, falls wir nur dieselben dabei $\leqq 90^0$ erhalten. Also folgendes Resultat:

---

*) Vgl. die Note pag. 150.

Errichtet man in irgend zwei Curvenpunkten p_1 und p_2, deren Azimuth-Unterschied $\theta_2 - \theta_1 \leqq 180^0$ ist, die inneren Normalen, und macht man dabei die Länge der einen, und ebenso auch die Länge der andern Normale

(*C.*) $$< R_0 ,$$

so werden diese beiden Normalen keinen Punkt mit einander gemein haben.

Hieraus ergiebt sich leicht die Richtigkeit des eigentlich zu beweisenden Satzes. Lässt man nämlich einen Punkt die gegebene Curve in positiver Richtung einmal durchwandern, so wird hierbei sein Azimuth monoton wachsen, und im Ganzen um 360^0 zunehmen, [vgl. (2.) und (3.) pag. 149]. Sind also irgend zwei *feste* Curvenpunkte g und h in ganz beliebiger Weise gegeben, und wächst das Azimuth bei einer positiven Wanderung von g nach h um Δ, so wird dasselbe bei einer Fortsetzung dieser Bewegung, nämlich bei der positiven Wanderung von h nach g, um $\mathsf{E} = 360^0 - \Delta$ wachsen.

Ist nun $\Delta \leqq 180^0$, so ist der Satz (*C.*) auf die beiden Punkte g, h ohne Weiteres anwendbar, indem man g mit p_1 und h mit p_2 bezeichnet.

Und ist andererseits $\Delta > 180^0$, so ist jener Satz (*C.*) *ebenfalls* anwendbar. Denn in diesem Falle ist $\mathsf{E} < 180^0$. Und die beiden Punkte subordiniren sich also jenem Satze, sobald man h mit p_1 und g mit p_2 bezeichnet.

Jener Satz (*C.*) ist mithin auf diese beiden *ganz beliebig* gegebenen Curvenpunkte g, h unter allen Umständen anwendbar. — *Q. e. d.*

Beweis des dritten Satzes. — An die gegebene Curve sei irgendwo ein innerer Berührungskreis gelegt, dessen Radius $A < R_0$ sein soll. Bezeichnet also C das Centrum, und p den Berührungspunkt dieses Kreises, so ist:

(𝔄.) $$(Cp) = A < R_0 ,$$

mithin:

(𝔅.) $$(Cp) = A = R_0 (1 - 2\delta) ,$$

wo alsdann δ eine *positive* und *von Null verschiedene* Grösse vorstellt.

Versteht man nun unter ϱ den von C aus nach irgend einem Curvenpunkte (ξ, η) gezogenen Radiusvector, und bezeichnet man die

Bogenlänge dieses Curvenpunktes mit σ, so sind ξ, η, ξ', η', ξ'', η'', mithin auch ϱ, ϱ', ϱ'', und folglich auch

$$\varrho^2\,,\quad \frac{d(\varrho^2)}{d\sigma}\,,\quad \frac{d^2(\varrho^2)}{d\sigma^2}$$

stetige Functionen von σ; wie sich solches aus den Voraussetzungen (1.) pag. 149 leicht ergiebt; [vgl. etwa die Note pag. 31]. Nach bekanntem Satze gilt daher, falls man die Bogenlänge σ des Punktes (ξ, η) in positiver Richtung von p aus rechnet, folgende Formel:

$$(\mathfrak{E}.)\qquad \varrho^2 = (\varrho^2)_p + \frac{\sigma}{1}\left(\frac{d(\varrho^2)}{d\sigma}\right)_p + \frac{\sigma^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2(\varrho^2)}{d\sigma^2}\right)_m\,,$$

wo $m = (\xi_m, \eta_m)$ einen unbekannten *intermediären* Curvenpunkt zwischen $p = (\xi_p, \eta_p)$ und (ξ, η) bezeichnet. Nimmt man das Kreiscentrum C zum Anfangspunkte des rechtwinkligen Coordinatensystems, so wird z. B. $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$, ferner $\varrho_p^2 = \xi_p^2 + \eta_p^2$, u. s. f. Kurz, die Formel ($\mathfrak{E}$.) gewinnt alsdann folgendes Aussehen:

$$(\mathfrak{D}.)\qquad \varrho^2 = \varrho_p{}^2 + 2\sigma(\xi\xi' + \eta\eta')_p + \sigma^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \xi\xi'' + \eta\eta'')_m\,.$$

Nach ($\mathfrak{A}$.) ist aber $\varrho_p = A$. Ueberdies steht dieser von C nach dem Berührungspunkte p laufende Radiusvector ϱ_p gegen die Curve senkrecht; so dass also $(\xi\xi' + \eta\eta')_p = 0$ ist. Demgemäss reducirt sich die Formel ($\mathfrak{D}$.) auf:

$$(\mathfrak{E}.)\qquad \varrho^2 = A^2 + \sigma^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \xi\xi'' + \eta\eta'')_m\,.$$

Nun ist allgemein [vgl. (C.) pag. 3]:

$$\xi' = \cos\theta\,,\qquad \xi'' = -\,\theta'\sin\theta\,,$$
$$\eta' = \sin\theta\,,\qquad \eta'' = +\,\theta'\cos\theta\,;$$

mithin einerseits:

$$(\alpha.)\qquad \xi'^2 + \eta'^2 = 1\,,$$

und andererseits:

$$\xi\xi'' + \eta\eta'' = \theta'(-\,\xi\sin\theta + \eta\cos\theta)\,,$$

also mit Rücksicht auf (2.), (4.) pag. 149, 150:

$$\operatorname{abs}(\xi\xi'' + \eta\eta'') \leqq \theta'\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\varrho}{R} \leqq \frac{\varrho}{R_0}\,,$$

und folglich:

$$(\beta.)\qquad \xi\xi'' + \eta\eta'' = \Theta\,\frac{\varrho}{R_0}\,,$$

wo Θ einen unbekannten echten Bruch bezeichnet. Substituirt man in (𝔈.) die Werthe (α.), (β.), so erhält man:

(𝔉.) $$\varrho^2 = A^2 + \sigma^2 \left(1 + \Theta \frac{\varrho_m}{R_0}\right),$$

wo σ die (von p aus gerechnete) Bogenlänge des Endpunktes von ϱ vorstellt, während ϱ_m einen unbekannten intermediären Radiusvector zwischen ϱ und ϱ_p bezeichnet.

Denkt man sich nun irgend ein den Punkt p einschliessendes Curvenintervall $p_1 p p_2$ construirt, so ergiebt sich aus (𝔉.) *für alle diesem Intervall $p_1 p p_2$ zugehörigen Radiivectores* ϱ folgende Formel:

(𝔊.) $$\varrho^2 \geqq A^2 + \sigma^2 \left(1 - \frac{\text{Max}\,(\varrho)}{R_0}\right),$$

wobei unter Max (ϱ) der *grösste* unter all' jenen dem Curvenintervall $p_1 p p_2$ zugehörigen Radiivectores ϱ zu verstehen ist.

Dieses Intervall $p_1 p p_2$ wird man aber so klein machen können, dass alle demselben angehörigen Radiivectores ϱ von dem speciellen Radiusvector

$$\varrho_p = R_0 (1 - 2\delta), \quad \text{[vgl. (𝔅.)]},$$

um weniger als $R_0 \delta$ verschieden sind. Alsdann wird der *grösste* jener Radiivectores $< R_0 (1 - \delta)$ sein, wodurch die Formel (𝔊.) übergeht in:

(𝔎.) $$\varrho^2 \geqq A^2 + \sigma^2 \delta .$$

Hieraus folgt sofort, dass sämmtliche zum Intervall $p_1 p p_2$ gehörige Radiivectores $\varrho > A$ sind, mit alleiniger Ausnahme des Radiusvectors ϱ_p. Für diesen letzteren ist nämlich $\sigma = 0$, also nach (𝔎.): $\varrho_p \geqq A$, was in Einklang steht mit der Formel (𝔄.), der zufolge $\varrho_p = A$ ist.

Also der Satz: *Es existirt stets ein den gegebenen Punkt p einschliessendes Curvenintervall*

(𝔏.) $$p_1 p p_2$$

von solcher Kleinheit, dass sämmtliche Punkte dieses Intervalls, mit alleiniger Ausnahme von p, ausserhalb des um C mit dem Radius A beschriebenen Kreises liegen. Demgemäss ist z. B.:

(𝔐.) $$(Cp_1) > A \ , \quad \textit{und ebenso auch:} \quad (Cp_2) > A \ ;$$

wobei die schon in (𝔄.) notirten Formeln:

(𝔑.) $$(Cp) = A \quad \textit{und} \quad A < R_0$$

zuzufügen gut erscheint.

Die zu $p_1 p p_2$ *complementare* Curvenstrecke mag mit $p_2 \pi p_1$ bezeichnet sein, der Art, dass beide Strecken $p_1 p p_2$ und $p_2 \pi p_1$ zusammengenommen die ganze gegebene Curve ausmachen. Dabei mag unter π ein längs dieser complementaren Curvenstrecke frei beweglicher Punkt verstanden sein, dessen *extreme* Lagen also durch die beiden *Endpunkte* dieser Strecke d. i. durch p_1 und p_2 dargestellt sein werden.

Wir wollen nun einstweilen *annehmen*, auf dieser Curvenstrecke $p_2 \pi p_1$ existire irgend ein Punkt π_0, für welchen der Radiusvector

(M.) $$(C\pi_0) \leqq A$$

ist, und die aus einer solchen Annahme sich ergebenden Consequenzen näher zu entwickeln suchen. Offenbar sind nur zwei Fälle möglich.

Entweder nämlich wird der Radiusvector $(C\pi_0)$ in π_0 *senkrecht* auf die Curve fallen. Dann würden $(C\pi_0) \leqq A$ und $(Cp) = A$ zwei in π_0 und p auf der Curve errichtete innere Normalen sein, die [vgl. (L.)] beide $< R_0$ sind, und die überdies den Punkt C mit einander gemein haben; — was dem schon bewiesenen zweiten Satze widerspricht.

Oder aber: $(C\pi_0)$ fällt in π_0 *schief* auf die Curve. Alsdann muss die Länge des Radiusvectors $(C\pi)$ nothwendig *sich ändern*, sobald man seinen Endpunkt π, von π_0 aus, längs der Curve ein wenig verschiebt, und zwar *wachsen* oder *abnehmen*, jenachdem man diese Verschiebung im einen oder andern Sinne ausführt. Diejenige Bewegungsrichtung des Punktes π, mit welcher eine *Abnahme* der Radiusvectorlänge verbunden ist, mag mit $\pi_0 p_h$ bezeichnet sein; der Art, dass p_h einen bestimmten der beiden Punkte p_1, p_2 repräsentirt. Lassen wir also den Punkt π die Curvenstrecke $\pi_0 p_h$ von π_0 bis p_h durchwandern, so wird der Radiusvector $(C\pi)$ zu *Anfang* den Werth $(C\pi_0) \leqq A$ besitzen, und sodann in den nächstfolgenden Augenblicken *noch kleinere* Werthe annehmen. Dieses Sichverkleinern oder Abnehmen des Radiusvectors $(C\pi)$ kann aber nur *eine Zeit lang*, nämlich nur bis zum Eintreffen des Punktes π in einem noch *vor* p_h liegenden Punkte π_1 fortdauern:

(M.) $$\pi_0 \cdots\cdots \pi_1 \cdots\cdots p_h \ ;$$

denn zu *Ende* der in Rede stehenden Bewegung, d. i. beim Eintreffen des Punktes π in p_k hat der Radiusvector die Länge (Cp_k), also eine Länge, die $> A$ ist [vgl. (𝔎.)]. Demgemäss wird die Verkleinerung des Radiusvectors $(C\pi)$ ununterbrochen fortdauern von π_0 bis π_1, um sodann von π_1 aus zunächst einem Wachsen oder auch einem Sichgleichbleiben Platz zu machen. Folglich steht der Radiusvector $(C\pi_1)$ im Punkte π_1 zur Curve *senkrecht*. Ueberdies ist seine Länge $< (C\pi_0)$, mithin auch $< A$; [vgl. (𝔐.)]. Demgemäss repräsentiren die beiden Linien $(C\pi_1) < A$ und $(Cp) = A$ zwei in π_1 und p auf der Curve errichtete innere Normalen, die [vgl. (𝔔.)] beide $< R_0$ sind, und die überdies den Punkt C miteinander gemein haben; — was dem schon bewiesenen zweiten Satze widerspricht.

Jene von uns gemachte Annahme (𝔐.) führt also unter allen Umständen zu absurden Folgerungen, und ist daher unhaltbar. Folglich kann auf der Curvenstrecke $p_2\pi p_1$ niemals ein Punkt π_0 existiren, für welchen $(C\pi_0) \leqq A$ ist. Oder mit anderen Worten: *Sämmtliche Punkte der Curvenstrecke $p_2\pi p_1$ liegen ausserhalb des um C mit dem Radius A beschriebenen Kreises.*

Die Combination dieses Resultates mit dem früheren Resultate (𝔍.) führt aber sofort zu der Einsicht, dass der von uns aufgestellte dritte Satz wirklich correct ist. — *Q. e. d.*

Dass die im Vorhergehenden über die Existenz und Eigenschaften des Punktes π_1 angestellten Betrachtungen auf Grund unserer über die Curve gemachten Voraussetzungen und unter Anwendung der schönen Bolzano-Weierstrass'schen Methoden als *vollkommen strenge* sich herausstellen, — bedarf wohl keiner näheren Darlegung. Genauer genommen ergiebt sich nämlich, dass innerhalb des Intervalls (𝔑.) irgend welche Punkte existiren müssen, in denen der nach der Bogenlänge genommene Differentialquotient des Radiusvectors $(C\pi)$ *verschwindet*. Und unter π_1 ist alsdann derjenige dieser Punkte zu verstehen, welcher auf π_0 *zunächst* folgt.

Beweis des vierten Satzes. — Denkt man sich zur gegebenen Curve zwei innere Parallelcurven s und s' construirt, deren Abstände A und A' von der gegebenen Curve der Formel entsprechen

$$(U.) \qquad A < A' < R_0 ,$$

so ist nachzuweisen, dass diese beiden Curven s und s' keinen Punkt mit einander gemein haben können.

Wir wollen *annehmen*, es existirte ein solcher den Curven s und s' gemeinsamer Punkt q, und die hieraus sich ergebenden Consequenzen entwickeln.

Der Definition von q zufolge muss die gegebene Curve eine durch q gehende innere Normale besitzen, deren Länge, bis q gerechnet, $= A$ ist, gleichzeitig aber auch eine innere, ebenfalls durch q gehende Normale besitzen, deren Länge, bis q gerechnet, $= A'$ ist. Bezeichnet man also die Fusspunkte dieser beiden Normalen mit p und p', so ist:

$$(V.) \qquad (pq) = A \quad \text{und} \quad (p'q) = A' \ ,$$

also mit Rücksicht auf (*U.*):

$$(W.) \qquad (pq) < R_0 \quad \text{und} \quad (p'q) < R_0 \ .$$

Nun sind offenbar, was die Grösse des Winkels pqp' betrifft, nur zwei Fälle möglich.

Entweder nämlich wird dieser Winkel $= 0$ sein. Dann würden die beiden Punkte p und p' unter einander identisch, also, nach (*V.*), $A = A'$ sein; — was mit (*U.*) in Widerspruch steht.

Oder aber: der Winkel pqp' ist von 0 verschieden. Alsdann sind (pq) und $(p'q)$ zwei auf der gegebenen Curve errichtete innere Normalen, die beide [vgl. (*W.*)] $< R_0$ sind, und die überdies den Punkt q mit einander gemein haben; — was in Widerspruch steht mit dem schon bewiesenen zweiten Satze.

Jene von uns gemachte Annahme, dass s und s' einen Punkt gemein haben, führt also unter allen Umständen zu absurden Resultaten, und ist daher unhaltbar. — *Q. e. d.*

Beweis des fünften Satzes. — Es sei auf der gegebenen Curve eine innere Normale

$$(pq) = A < R_0$$

errichtet; dabei bezeichne p den Fusspunkt und q den Endpunkt derselben. Denken wir uns den Fusspunkt p dieser Normale längs der gegebenen Curve fortwandernd, während ihre Länge A constant bleibt, so wird ihr Endpunkt q eine innere Parallelcurve von constantem Abstande A beschreiben.

Besässe nun diese Curve in q einen Doppelpunkt, so müsste die Normale (pq), nachdem sie eine Zeit lang fortgewandert ist, in

eine Lage $(p'q')$ gelangen, bei welcher q' mit q zusammenfällt. Dann aber würden diese beiden Normalen (pq) und $(p'q')$, die beide $< R_0$ sind, den Punkt q gemein haben; — was dem schon bewiesenen zweiten Satze widerspricht. Folglich ist die Annahme, dass jene Parallelcurve einen Doppelpunkt besitzt, unhaltbar. — *Q. e. d.*

Nachträgliche Bemerkung zum Theorem pag. 82.

Es sei irgend ein Gebiet $\mathfrak{T}$ gegeben, einerlei ob die Randcurve dieses Gebietes den auf pag. 4 angegebenen Determinationen entspricht oder nicht. Ferner sei $\Psi = \Psi(x, y)$ irgend eine *Fundamentalfunction* des Gebietes $\mathfrak{T}$; und die Randwerthe von Ψ mögen mit f bezeichnet sein. Betrachtet man nun diese Randwerthe f, ebenso wie die Werthe θ [vgl. pag. 3], als Functionen der Bogenlänge σ, und bezeichnet man die Differentialquotienten dieser Functionen nach σ durch Accente, so erhält man, und zwar unmittelbar auf Grund des Theorems pag. 82, folgenden Satz:

Satz. — *Ist s ein Randpunkt des Gebietes $\mathfrak{T}$, und setzt man voraus, dass innerhalb eines beliebig kleinen den Punkt s einschliessenden Randintervalls θ, θ', θ'', f, f' stetig, und f'' abtheilungsweise stetig sind, und dass ausserdem θ' innerhalb dieses Intervalls durchweg $\geqq 0$ ist, so werden die Ableitungen*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

bei einer Annäherung an den Punkt s gegen bestimmte endliche Werthe convergiren. Ueberhaupt werden alsdann diese Ableitungen stetig sein in ganzer Erstreckung desjenigen Gebietes, welches von $\mathfrak{T}$ abgetrennt wird durch eine um s mit hinreichend kleinem Radius beschriebene Kreisperipherie.

Dieser Satz, dessen Zusammengehörigkeit mit den Sätzen pag. 43, 44 von selber ins Auge fällt, dürfte wohl noch einer gewissen Vereinfachung fähig sein. In der That dürfte eine genauere Untersuchung zu dem Ergebniss führen, dass die in diesem Satz genannte Voraussetzung: $\theta' \geqq 0$ überflüssig ist, und also ganz fortgelassen werden kann.

Inhaltsübersicht.

Seite

Ueber die Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und über die geschlossene Curve, durch welche diese beiden Gebiete sich bestimmen 3
Determinationen 4
Plan der Untersuchung 5
Methoden und Resultate 14

Erstes Capitel: Ueber die Potentiale V und W, namentlich über die Ableitungen derselben.

§ 1. Ueber das Potential V. Theorem $V\alpha$. 16
§ 2. Ueber das Potential W. Theorem $W\alpha$. 22
(Nachträge zur *ersten* Abhandlung findet man auf pag. 28—31.)
§ 3. Die ersten Ableitungen des Potentials V. Theorem $V\beta$. 31
§ 4. Die ersten Ableitungen des Potentials W. Theorem $W\beta$. 37
§ 5. Allgemeine Betrachtungen über die höheren Ableitungen der Potentiale V und W. 44
§ 6. *Recapitulation und Vereinfachung der Theoreme $V\alpha$., $W\alpha$. und $V\beta$., $W\beta$.* 46
§ 7. Die zweiten Ableitungen des Potentials V. Theorem $V\gamma$. 49
§ 8. Die zweiten Ableitungen des Potentials W. Theorem $W\gamma$. 54
§ 9. *Tabellarische Uebersicht der sechs Theoreme $V\alpha$., $V\beta$., $V\gamma$. und $W\alpha$., $W\beta$., $W\gamma$.* 57
§ 10. Ueber eine aus zwei Potentialen V und W zusammengesetzte monogene Function 58

Zweites Capitel: Ueber Fundamentalfunctionen mit vorgeschriebenen Randwerthen, namentlich über die Ableitungen dieser Functionen.

§ 11. Vorläufige Betrachtungen über die Azimuthe θ und γ 63
§ 12. Einige Hülfssätze 73
§ 13. *Ein wichtiges Theorem, welches durch die Methode des arithmetischen Mittels für die Ableitungen der Fundamentalfunctionen sich ergiebt.* (Man findet dieses Theorem auf pag. 82.) 77
§ 14. Weitere Sätze über die Ableitungen der Fundamentalfunctionen . . . 83
§ 15. Ueber monogene Fundamentalfunctionen 94

Drittes Capitel: Ueber die Green'sche Function und die Theorie der conformen Abbildung.

§ 16. Geometrische Sätze 100
§ 17. Aufstellung einiger Hülfssätze 106
§ 18. Untersuchung der *Green'schen Function* am Rande ihres Gebietes. Die sich dabei zunächst darbietende Methode 113
§ 19. Fortsetzung. Methode der berührenden Kreisfläche 120
§ 20. Fortsetzung. Methode der übergreifenden Kreisfläche 129
§ 21. Zusammenstellung und Vervollständigung der über die Green'sche Function erhaltenen Resultate 140
§ 22. Zur Theorie der *conformen Abbildung* 144
Anhang zum letzten Capitel (gehörig zu § 16) 159
Nachträgliche Bemerkung zum Theorem pag. 82 (in § 13) 163

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

7 31 33

RETURN TO → Astronomy/Mathematics/Statistics Library
100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1 **1 MONTH**	2	3
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

DUE AS STAMPED BELOW

DEC 02 1996
JAN 6 RECEIVED
FEB 29 2000
JUL 19 2000
NOV 10 1998
Rec'd UCB A/M/S MATH LIBRARY
RETURNED
JAN 20 1999
FEB 17 2001
FEB 20 1999
AUG 21 2000
UCB MATH LIBRARY
Rec'd UCB-AMS SEP 17 1999
OCT 19 1999
JAN 04 2000
Rec'd UCB A/M/S
JAN 28 2000

FORM NO. DD 19
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

U. C. BERKELEY LIBRARIES
C054607325
QA
355
N4
MATH/STAT
LIBRARY